Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Skript auf Grundlage der entsprechenden Vorlesung von Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2014/15

Differentialgleichung

Gleichung, welche eine unbekannte Funktion und deren Ableitungen beinhaltet.

skalar — 1 Gleichung

System — mehrere Gleichungen

gewöhnlich — eine unabhängige Variable (z.B. Zeit t, Ort x (1dimensional))

sonst partiell

explizit — nach der höchsten Ableitung auflösbar

Inhalte der Vorlesung Differentialgleichungen I.

1. Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen.
2. Elementare Lösungsmethoden.
3. Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben.
4. Lineare Systeme 1. Ordnung, Systeme mit konstanten Koeffizienten.
5. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.
6. Laplace–Transformation bei Differentialgleichungen.
7. Stabilität von Lösungen.
8. Randwertaufgaben, Variationsrechnung.
9. Numerische Verfahren für Anfangswertaufgaben.
10. Numerische Verfahren für Randwertaufgaben.

Kapitel 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung und Beispiele

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Definition: Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$\mathbf{F} : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{(m+1)–fach}} \to \mathbb{R}^n$$

heißt implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung m.

Läßt sich das System nach $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ auflösen, so ergibt sich das explizite System der Form:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

1.1. Einführung und Beispiele

Im Folgenden suchen wir stets eine $\mathcal{C}^m$–Funktion m mal stetig diffbar.

$$\mathbf{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt: für $t \in [a, b]$ gilt also

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Spezialfall: Hängen die Funktionen **F** bzw. **f** nicht explizit von (der Zeit) t ab, so nennt man das System autonom, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch Trajektorien der DGL.

Beispiel: Die skalare autonome Gleichung erster Ordnung

Ordnung 1, explizit

skalar, $f(t, y(t)) = y(t)$, autonom

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Anfangswertaufgabe

Festlegung für ein $t = a$

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \; a \le t \le b, \; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a \qquad \text{(Anfangswert)} \end{cases}$$

Randwertaufgabe

Festlegung an $t = a$ und $t = b$
bzw. eine Kombination

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \; a \le t \le b, \; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \qquad \text{(Randwert)} \end{cases}$$

Beispiele:

·) $y'(t) = 0$ $\qquad y(t) = c$ $\qquad$ z.B. AB $y(2) = 7 \Rightarrow c = 7$

Lösung $y(t) = 7$

·) $y''(t) = 0$ $\qquad y(t) = c_0 t + c_1$

$y'(t) = c_0$

z.B. AB $\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\}$ $\quad c_1 = 1$, $c_0 = 1$

Lös. $\boxed{y(t) = t + 1}$

z.B. RB $y(0) = 1$, $y(1) = 4$ $\quad \Rightarrow c_1 = 1$

$4 \overset{!}{=} c_0 \cdot 1 + 1$

$c_0 = 3$

$\boxed{y(t) = 3t + 1}$

Beispiel 1: Populationsmodell I

Sei $N(t)$ die Größe einer Population, zum Beispiel Bakterien auf einem Nährboden. Die Änderung der Population in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

$$\text{die Geburtenrate } b \quad \text{und} \quad \text{die Sterberate } d.$$

Dann gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b-d)N(t)$$

Im Grenzwert $\Delta t \to 0$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) \quad \text{mit} \;\; \alpha = b - d$$

$N(t) = c\, e^{\alpha t}$

AB

Mit dem Anfangswert $\boxed{N(t_0) = N_0}$ ergibt sich die eindeutige Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)} = \left(N_0\, e^{-\alpha t_0}\right) e^{\alpha t}$$

$t \to \infty$: $\to 0$ ($\alpha < 0$); $\to N_0 e^{-\alpha t_0}$ ($\alpha = 0$); $\to \infty$ ($\alpha > 0$)

Die Population besitzt also ein exponentielles Wachstum.

Beispiel 2: Populationsmodell II.

Bei exponentiellem Wachstum gilt für $\alpha > 0$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$$

hier: keine Sterberate!

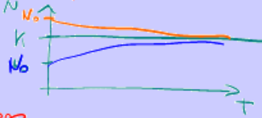
und das ist unrealistisch (zum Beispiel: Weltbevölkerung).
Suche also ein Modell mit

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K < \infty$$

Verhulst: Wachstumsrate ist eine mit $N(t)$ linear fallende Funktion

$$b = \lambda (K - N(t))$$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$



Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe lautet dann

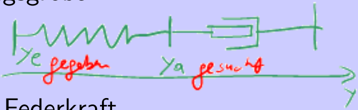
$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}} \xrightarrow{t\to\infty} K$$

und man spricht hier vom logistischen Wachstum.

Beispiel 3: Das Regelkreisglied.

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung

$$
\begin{aligned}
y_e(t) &= \text{vorgegebene Eingangsgröße} \\
y_a(t) &= \text{Ausgangsgröße} \\
K_F(t) &= K(y_e(t) - y_a(t)) = \text{Federkraft} \\
K_D(t) &= r\, y_a'(t) = \text{Dämpferkraft}
\end{aligned}
$$



wobei K die Federkonstante und r den Dämpfungskoeffizienten bezeichnet.

Modellierung als gewöhnliche Differentialgleichung liefert

$$\boxed{y_a'(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t) \quad \text{mit } \lambda = \frac{K}{r}}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von $y_e(t)$, $t \geq t_0$ ist

$$y_a(t) = y_a(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} y_e(\tau) e^{\lambda(\tau - t)} d\tau$$

Beispiel 4: Die Newtonsche Abkühlung.

Für die Temperatur $T(t)$ eines homogenen Körpers gilt (vereinfacht) die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m}(T_a(t) - T(t))$$

cmT Energiedichte

$\frac{d}{dt}(cmT) = cm\frac{dT}{dt}$

Dabei ist

$$\begin{aligned} T_a(t) &= \text{Umgebungstemperatur} \\ m &= \text{Masse des Körpers} \\ F &= \text{Oberfläche} \\ c &= \text{spezifische Wärme} \\ k &= \text{Proportionalitätsfaktor} \end{aligned}$$

Die Gleichung ist identisch mit der des Regelkreisglieds und insbesondere gilt

$$T(t) \to T_a(t) \qquad \text{für } t \to \infty.$$

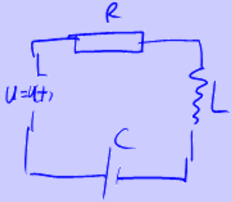
Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis.

Gegeben seien

der Ohmsche Widerstand R,

die Induktivität L,

die Kapazität C.



Für die Spannungsabfälle gilt

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad I = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Physik

sowie bei vorgegebener Spannung $U(t)$

$= L \frac{dI}{dt} = LC \frac{d^2U_c}{dt^2}$

$$RI = RC\frac{dU_c}{dt} \leftarrow \quad U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Kirchhoff

Wir ersetzen in U_R und U_L die Variable I durch $C \cdot dU_C/dt$, und erhalten

$$\boxed{R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_C}{dt^2} + U_C = U(t)}$$

Modell für den Golfstrom (1961)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (1-T) - |q(T,S)|\,T \\ \frac{dS}{dt} &= \gamma(1-S) - |q(T,S)|\,S \end{aligned}}$$

$$q(T,S) = \alpha T - \beta S$$

System, 1. Ordnung

explizit

$$y(t) = \begin{pmatrix} T(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis (Fortsetzung).

Der Schwingkreis wird modelliert durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC\,\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = U(t)$$

Typisch ist die Vorgabe einer Wechselspannung, also $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

Beobachtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{dU_C}{dt}(t_0) = C_2$$

Es existiert auch eine Darstellung als System erster Ordnung,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{R}{L}\,y_2 - \frac{1}{LC}\,y_1 + \frac{1}{LC}\,U \end{aligned}$$

wobei $y_1 := U_c$ und $y_2 := dU_C/dt$.

Das Richtungsfeld einer skalaren Gleichung erster Ordnung.

Gegeben sei die Differentialgleichung skalar, explizit, 1. Ordnung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}$$

Betrachte an jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ den Richtungsvektor

$$\boxed{v = (1, y')^T}$$

in der Tangentenrichtung $y' = f(t, y)$.

Definition: Ein Tripel $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$, das die Gleichung $y' = f(t, y)$ erfüllt, nennt man ein Linienelement der Differentialgleichung.

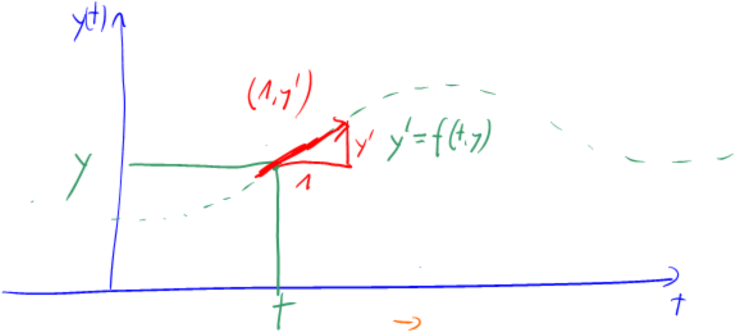
Beispiele:

- Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$.
- "Erraten" der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds: Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

Richtungsfeld(s)

$y'(t) = f(t, y(t))$ gesucht $y = y(t)$

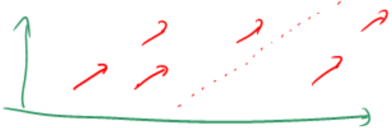


Bspl

·) $y'(t) = 0 = f$

$y(t) = c$

·) $y'(t) = c = f$



$y(t) = ct + c_1$

Ein Beispiel zum Richtungsfeld.

Die Linienelemente der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel $\left(t, y, -\frac{t}{y}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Der Richtungsvektor v im Punkt (t, y) ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

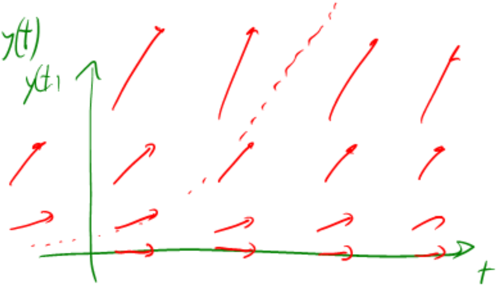
und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad \text{mit dem Ortsvektor } r$$

Die Lösungen sind (geometrisch gesehen) Kreise in der (t, y)–Ebene

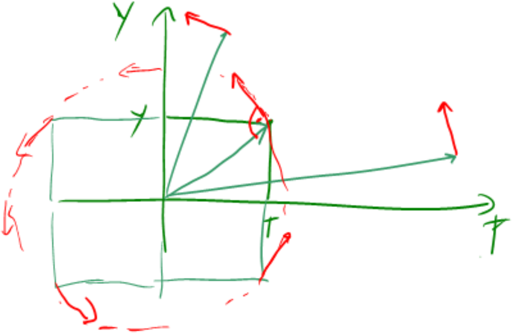
$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \qquad (-r < t < r)$$

·) $y'(t) = y(t)$ $\qquad f(t, y(t)) = y(t)$



·) $y' = -\frac{t}{y}$

$(t,y)\cdot\left(1,-\frac{t}{y}\right) = 0$



Vermutung: Kreis

$y^2 + t^2 = r^2$

$y = \pm\sqrt{r^2 - t^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-2t}{\pm 2\sqrt{}} = -\frac{t}{y}$

1.2 Elementare Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einfachen Methoden zur Berechnung von Lösungen der folgenden einfachen gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen.

- Separierbare Differentialgleichungen
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- Bernoullische Differentialgleichungen
- Riccatische Differentialgleichungen
- Exakte Differentialgleichungen

Typ A: Separierbare Differentialgleichungen.

Speziell: skalar, explizit
1. Ordnung.
rechte Seite $= f(t) \cdot g(y)$

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t) \cdot g(y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

in einem Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der (t, y)–Ebene.

Gilt $g(y) \neq 0$, so lassen sich die Variablen t und y trennen: $\cdot \frac{1}{g(y)}$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t)$$

Integration unter Verwendung der Substitutionsregel ergibt

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Separierbare Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir mit $H(y)$ eine Stammfunktion von $1/g(y)$, also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt wegen

$$H(y) - H(y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

gerade

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Da $g(y) \neq 0$, ist die Stammfunktion $H(y)$ injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1} \left(H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \right)$$