Laplace–Transformation und Differentialgleichungen.

Nach dem Differentiationssatz gilt

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Idee: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$Y'(t) = Y(t), \qquad Y(0) = 1$$

Dgl

Für die Laplace–Transformierte $y(s)$ von $Y(t)$ ergibt sich dann

Algebraische Gl.

$$sy(s) - 1 = y(s) \quad \Rightarrow \quad y(s) = \frac{1}{s-1}$$

und aus der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$Y(t) = e^t$$

Resultat: Lineare Differentialgleichungen ergeben algebraische Gleichungen für die Laplace–Transformierte.

Beispiel.

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems ($\alpha > 0$)

$$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t)$$

$Y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,y(s) - Y(0)$

$Y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 y(s) - s\,Y'(0) - Y(0)$

mit $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Nach der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

und es gilt

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$$

Man könnte nun mit einer Partialbruchzerlegung weitermachen.

Wir verwenden hier die Beziehung

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$F(t) = \sin(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} = f(s)$$

und dem Multiplikationssatz

$$tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -f'(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2} = 2s\,y(s) = -\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

folgt

$$-\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ t\sin(\alpha t)$$

Anwendung des Integrationssatzes liefert dann die Beziehung

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2}\int_0^t \tau\sin(\alpha\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\alpha^2}\Big(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t)\Big)$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{1}{2\alpha^2}\Big(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t)\Big)$$

Romeo u. Julia

$$\begin{pmatrix} \dot{j} \\ \dot{r} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \pm a r \\ b j \end{pmatrix} \qquad a, b > 0$$

$j(0) = j_0$

$r(0) = r_0$

$j \circ\!\!-\!\!\bullet\, y \qquad r \circ\!\!-\!\!\bullet\, z$

$s y(s) - j_0 = \pm a z(s)$

$s z(s) - r_0 = b y(s)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s & \mp a \\ b & s \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 \pm ab} \begin{pmatrix} s & \pm a \\ -b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ r_0 \end{pmatrix} =$$

$+$

$$= \frac{1}{s^2 + ab} \begin{pmatrix} j_0 s + a r_0 \\ -b j_0 + s r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{j_0 s}{s^2+ab} + a r_0 \frac{1}{s^2+ab} \\ -\frac{b j_0}{s^2+ab} + r_0 \frac{s}{s^2+ab} \end{pmatrix}$$

Linearkombination

$\cos(\sqrt{ab}\, t), \sin(\sqrt{ab}\, t)$

$\Leftarrow \quad$ = Linearkombination $\frac{s}{s^2 + (\sqrt{ab})^2}, \frac{\sqrt{ab}}{s^2 + (\sqrt{ab})^2}$

Linearkom.

$e^{\sqrt{ab}\, t}, e^{-\sqrt{ab}\, t}$

$-$

$$\frac{1}{s^2 - ab} = c_0 \frac{1}{s - \sqrt{ab}} + c_1 \frac{1}{s + \sqrt{ab}} \ldots$$

$\Leftarrow$

Ein zweites Beispiel.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} Y'' + Y' + 4Z &= \sin(\omega t) \\ Y' + Z' + Z &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $Y(0) = -\frac{1}{3}$, $Y'(0) = 0$ und $Z(0) = 0$

Anwendung der Laplace–Transformation ergibt

$$\begin{aligned} s^2 y(s) - sY(0) - \cancel{Y'(0)} + sy(s) - \overset{-1/3}{\cancel{Y(0)}} + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - \cancel{Z(0)} + z(s) &= 0 \end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} s(s+1)y(s) + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{s+1}{3} \\ sy(s) + (s+1)z(s) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem

Fortsetzung des Beispiels.

Die Funktionen $(y(s), z(s))$ erfüllen ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix} \qquad A(s)\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \ldots$$

und die Lösung lautet

$$y(s) = \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2+\omega^2)}{3(s^2+\omega^2)s[(s+1)^2-4]} \qquad \text{zusätzlich} \quad \frac{1}{s}$$

$$1$$

$$z(s) = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)[(s+1)^2-4]}$$

Die nächsten Schritte:

$$\underset{\sin \omega t}{\frac{1}{s^2+\omega^2}}, \quad \underset{\cos \omega t}{\frac{s}{s^2+\omega^2}}, \quad \frac{1}{s+1-2} = \underset{e^{t}}{\frac{1}{s-1}}, \quad \underset{e^{-3t}}{\frac{1}{s+1+2}} = \frac{1}{s+3}$$

1. Partialbruchzerlegung
2. Rücktransformation aus der Korrespondenztabelle

Nach längeren Umformungen ergibt sich

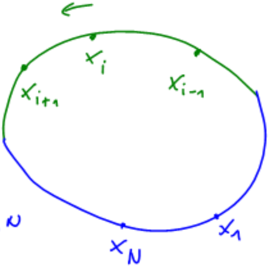
$$
\begin{aligned}
y(\cancel{s}\,t) &= -\frac{\omega^2-3}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) - \frac{\omega^2+5}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t) \\
&\quad + \frac{\omega}{2(\omega^2+1)}e^{t} - \frac{\omega}{6(\omega^2+9)}e^{-3t} - \frac{\omega+1}{3\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z(\cancel{s}\,t) &= \frac{2\omega}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) + \frac{\omega^2+3}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t) \\
&\quad - \frac{\omega}{4(\omega^2+1)}e^{t} + \frac{\omega}{4(\omega^2+9)}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

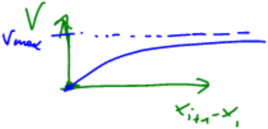
Fazit: komplizierte Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

Motivation: Stabilität

Kreis Länge L



$x_i = x_i(t)$



$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{\tau}\left[\dot{x}_i - V(x_{i+1}-x_i)\right]$$ Bando ('95)

optimale Geschwindigkeitsf.

$i = 1, \dots, N$

$$x_{N+1} = x_1 + L$$

headway $y_i = x_{i+1} - x_i$

$$\ddot{x}_{i+1} = -\frac{1}{\tau}\left[\dot{x}_{i+1} - V(x_{i+2}-x_{i+1})\right]$$

$$\boxed{\ddot{y}_i = -\frac{1}{\tau}\left[\dot{y}_i - V(y_{i+1}) + V(y_i)\right]}$$ $i = 1, \dots, N$

$y_{N+1} = y_1$

Dgl.-System, 2. Ord., nicht linear, autonom

Lösung?

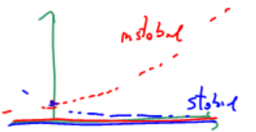
$$\boxed{y_i = \frac{L}{N},\ \dot{y}_i = 0,\ \ddot{y}_i = 0} \checkmark$$

3.5 Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Weiterhin sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.



Frage: Wie verhalten sich benachbarte Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel: Wir betrachten die beiden Anfangswertaufgaben

Bspl 1   Bsp 2

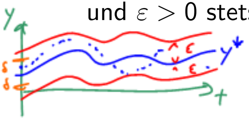
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) \\ y_1(0) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{bzw.} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y_2'(t) & = & -y_2(t) \\ y_2(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$. Die Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit einer Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind aber gegeben durch

$$y_1(t) = y_0 e^t \to \pm\infty \qquad \text{bzw.} \qquad y_2(t) = y_0 e^{-t} \to 0 \qquad \text{für} \quad t \to \infty$$

Definition:

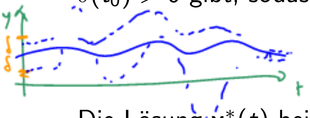
a) Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt stabil auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\mathbf{y}_0$ mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt



$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \in I$$

Kann man δ unabhängig von t_0 wählen, so nennt man $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig stabil auf I.

b) Ist die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ dort asymptotisch stabil, falls $\mathbf{y}^*(t)$ dort stabil ist, und es zu $t_0 \geq a$ stets ein $\delta(t_0) > 0$ gibt, sodass für alle $\mathbf{y}_0$ mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt



$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0$$

Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt strikt stabil, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Stabilitätsuntersuchung der Nulllösung reicht aus.

Bemerkung: Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig sieht man sofort, dass $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

ist.

Statt der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir also – äquivalent dazu – die Stabilität der Nulllösung von $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$ untersuchen.

Stabilitätssatz I bei linearen Differentialgleichungen.

Für ein linearen Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \qquad \text{mit } a \leq t < \infty$$

und stetiger Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem.

Satz: (Stabilitätssatz I) $y(t) = Y(t)\cdot c,\ y(t_0) = Y(t_0)\cdot c = y_0,\ c = Y^{-1}(t_0)\, y_0,\ \boxed{y(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\, y_0}$

1) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf dem Intervall $[a, \infty)$, falls das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.

2) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass für alle $t \geq t_0 \geq a$ gilt

$$\|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M$$

3) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

Ein weiteres Stabilitätskriterium.

Satz: Sei $\lambda(t)$ der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Ist die Beziehung

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t)dt = -\infty$$

erfüllt, so folgt für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0,$$

d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist asymptotisch stabil.

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{d}{dt}\|\mathbf{y}\|^2} \quad &= \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{y}^T\mathbf{y}\right) = \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{y})^T}_{\frac{d}{dt}y^T}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{y})}_{\frac{d}{dt}y} = \mathbf{y}^T\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\right)\mathbf{y} \\ &\le \quad \lambda(t)(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = \boxed{\lambda(t)\cdot\|\mathbf{y}\|^2} \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}\|^2 \quad \le \quad \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)$$

Stabilitätssatz II bei linearen Differentialgleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz II) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ mit der konstanten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

1) strikt stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt: $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$.

2) gleichmäßig stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \le 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ instabil.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil, denn die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$ (doppelter Eigenwert), aber $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.