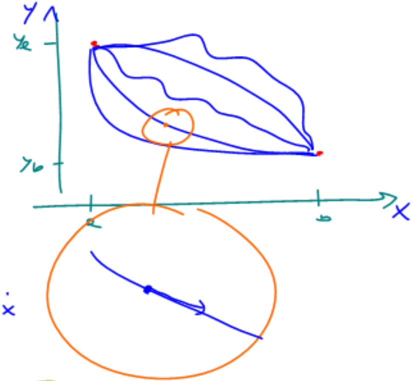
reibungsfrei

$y = y_a \qquad v = 0$

$$mgy + m\frac{v^2}{2} = \text{const} = mg\,y_a$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2g(y_a - y)$$

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{y_a - y}$$



$x = x(t) \qquad \dot{x} = \dot{x}$

$y = y(x(t)) \qquad \dot{y} = y'\dot{x}$

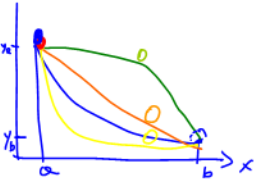
$$v = |v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + y'^2\dot{x}^2} = \sqrt{1+y'^2}\,\dot{x}$$

$$\sqrt{2g}\sqrt{y_a - y} = \sqrt{1+y'^2}\,\dot{x}$$

$$T = \int_0^{t_b} dt = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_a - y}}\,dx \longrightarrow \text{Min}} \quad + \quad \boxed{\begin{array}{l} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{array}}$$

1696 Bernoulli

1755 Lagrange



4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

Problem der Brachistochrone (Johann Bernoulli, 1696):

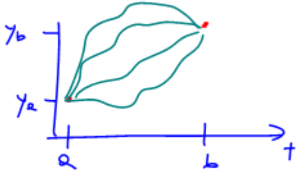
Man bestimme eine differenzierbare Funktion $y = y(t)$ mit Randbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, sodass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}}\, dt$$

minimal wird.

Interpretation: Das angegebene Funktional $I[y]$ beschreibt – bis auf einen Vorfaktor – die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve $y = y(t)$ von Punkt $A = (a, y_a)$ zum Punkt $B = (b, y_b)$ zu kommen.

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die vorgebenenen Randbedingungen



$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

minimiert.

Ziel: Wir suchen eine Randwertaufgabe, die zu der oben formulierten Variationsaufgabe äquivalent ist.

Zur Lösung des Variationsproblems (Lagrange, 1755).

Sei $y_0(t)$ die Lösung des allgemeinen Variationsproblems und $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion mit

$$h(a) = h(b) = 0$$

Setzen wir $y(t, \varepsilon)$ als

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t),$$

so besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[\, y(\cdot, \varepsilon)\,] = I[\, y_0 + \varepsilon h\,]$$

im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum, denn $y_0(t)$ löst das allgemeine Variationsproblem.

Da $J(\varepsilon)$ eine skalare Funktion der reellen Variablen ε ist, gilt als notwendige Bedingung für einen (lokalen) Extremwert (nach Analysis I)

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$

Die erste Variation δI.

Definition: Der Ausdruck δI definiert durch

$$\delta I := \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \partial(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

heißt die 1. Variation des Funktionals $I[y]$.

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss $\delta I = 0$ gelten.

Bemerkung:

- Die Funktion

$$\delta y(t) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overbrace{y(t,\varepsilon)}^{y_0(t)+\varepsilon h(t)}\big|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

  nennt man auch die 1. Variation der abhängigen Variablen.
- Die erste Variation δI entspricht der Richtungsableitung von $I[y]$ in Richtung h an der Stelle y_0.

Berechnung der ersten Variation

Die 1. Variation berechnet man wie folgt.

$\frac{d}{d\varepsilon} I[y_0(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)]$

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y_0' + \varepsilon h')dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t)\Big|_a^b}_{=0} \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt
\end{aligned}
$$

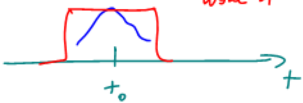
$$\int_a^b \underbrace{(\qquad)}_{z(t)} h(t)\,dt = 0 \qquad \forall h(t) \qquad h(a)=h(b)=0$$

$$\Rightarrow z(t) = 0$$

weil: falls $z(t_0) \neq 0$, z in einer Umgebung von t_0 ~~...~~ nicht 0

wähle h

$$\Rightarrow \int_a^b z(t)\,h(t)\,dt \neq 0$$



Das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Wir erhalten also aus Bedingung $\delta I = 0$:

$$\int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da $h(t)$ beliebig ist, folgt das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Dgl. implizit, 2.te Ordnung

$$\boxed{f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0} \qquad \text{für } a \le t \le b$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0(a) = y_a \\ y_0(b) = y_b \end{array}}$$

Satz: Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe

$$f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \quad = \quad 0$$

$$y_0(a) = y_a \qquad y_0(b) = y_b$$

Die Differentialgleichung nennt man die Euler–Lagrange–Gleichung.

Explizite Form der Euler–Lagrange–Gleichung.

Wegen

$$f_y(t,y_0,y_0') = \frac{d}{dt} f_{y'}(t,y_0,y_0') = f_{y't}(t,y_0,y_0') + f_{y'y}(t,y_0,y_0') \cdot y_0' + \underline{f_{y'y'}(t,y_0,y_0')} \cdot y_0''$$

läßt sich die Euler–Lagrange Gleichung unter der Regularitätsbedingung

$$f_{y'y'}(t,y_0,y_0') \neq 0$$

nach y_0'' auflösen und damit in der expliziten Form

$$y_0'' = \frac{f_y(t,y_0,y_0') - f_{y't}(t,y_0,y_0') - f_{y'y}(t,y_0,y_0') \cdot y_0'}{f_{y'y'}(t,y_0,y_0')}$$

schreiben.

Bemerkung: Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

- die Funktion f ist unabhängig von y, d.h. $f = f(t,y')$,
- die Funktion f hängt nicht explizit von t ab, d.h. $f = f(y,y')$.

1. Hängt f nicht von y ab, $f = f(t, y')$ so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0.$$

Dies bedeutet aber für alle $a \leq t \leq b$ Dgl 1. Ordnung

$$f_{y'}(t, y_0, y_0') = \text{const.}$$

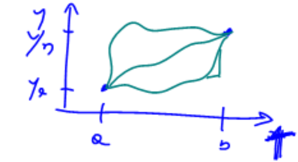
2. Hängt f nicht explizit von t ab, so gilt für alle $a \leq t \leq b$

Hamilton $H := f - f_{y'} y' = \text{const.}$ Dgl 1. Ordg.

denn

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt}(f - f_{y'} y') = f_y y' + \cancel{f_{y'} y''} - \left(\frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' - \cancel{f_{y'} y''} \\ &= \underbrace{\overbrace{\left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\right)}^{=0}}_{\text{Euler-Lagrange Gleichung}} y' = 0\end{aligned}$$

Bspl:



$$y(a) = y_a \quad , \quad y(b) = y_b$$

$$y = y(t)$$

$$ds = \sqrt{dt^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dt)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\text{Länge} = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+y'(t)^2}}_{f(y')}\, dt$$

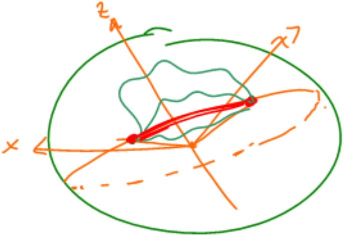
•) $f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$

•) f nicht von y abhängig $\rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const}$

•) f nicht von t abhängig: $H = f - f_{y'} y' = \sqrt{\quad} - \frac{y' \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \overset{!}{=} \text{const}}$

$$y'^2 = \frac{1}{\text{const}^2} - 1 \qquad y' = \pm\sqrt{\frac{1}{\text{const}^2} - 1} = \text{const}$$

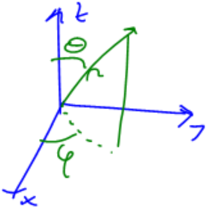
$$y(t) = y_a + \frac{y_b - y_a}{b-a}(t-a)$$



A: $(r, \varphi_a, \frac{\pi}{2})$

B: $(r, \varphi_b, \frac{\pi}{2})$

$\theta = \theta(\varphi)$



$x = x(\varphi) = r\cos\theta(\varphi)\cos\varphi$

$y = y(\varphi) = r\cos\theta(\varphi)\sin\varphi$

$z = z(\varphi) = r\sin\theta(\varphi)$

$x' = r($

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{r^2(-\sin\theta\,\theta'\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)^2 + r^2(-\sin\theta\,\theta'\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi) + r^2(\cos\theta)^2\theta'^2}\,d\varphi =$$

$$= r\sqrt{\underbrace{\theta'^2\left(\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \cos^2\theta\right)}_{1} + \cos^2\theta\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1}}\,d\varphi$$

$$= r\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}\,d\varphi$$

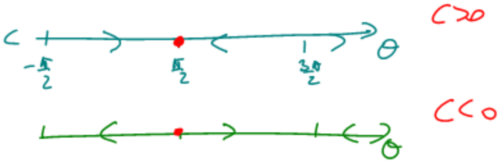
$$\text{Longe} = r\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \underbrace{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}}_{f = f(\theta, \theta')}\,d\varphi \longrightarrow \text{Min}$$

$$H = f - f_{\theta'}\,\theta' = \sqrt{\theta'^2+\cos^2\theta} - \frac{\theta'\,\theta'}{\sqrt{\quad}} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2+\cos^2\theta}} \overset{!}{=} \text{const}$$

$$\theta(y_a) = \frac{\pi}{2} = \theta(y_b)$$

$$\theta'^2 = \left(\frac{1}{\text{const}^2} - 1\right)\cos^2\theta$$

$$\theta' = c\cos\theta$$



$$\Rightarrow c = 0 \qquad \theta' = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel: Das Problem der Brachistochrone.

Gesucht ist eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $y(t)$, die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(t)}}\, dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \quad \text{und} \quad y(b) = y_b$$

minimiert.
Der Integrand von $I[y]$ hängt nicht explizit von t ab, wir bestimmen daher die Hamilton–Funktion:

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'} y' \\ &= \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Für die Hamilton–Funktion gilt

$$H = \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a - y(t)}} = c_1 = \text{const.}$$

Daraus erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = y' = \sqrt{\frac{2c - (y_a - y)}{y_a - y}} \qquad \text{mit } 2c = \frac{1}{c_1^2} > 0$$

Eine Trennung der Variablen ergibt dann die implizite Darstellung

$$\int_{y_a}^{y} \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2c - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a,$$

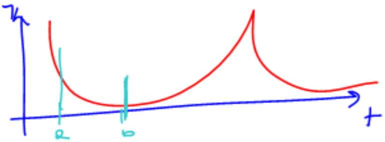
eine Zykloide (siehe Band 1, Beispiel 14.2.2).

$$\boxed{t-a} = \int_{y_a}^{y} \sqrt{\frac{y_a-\eta}{2c-(y_a-\eta)}}\,d\eta \overset{z=y-\eta}{=} \int_{y_a-y}^{0} \sqrt{\frac{z}{2c-z}}\,dz =$$

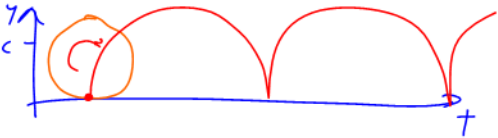
$$= c\arccos\left(\frac{c-z}{c}\right) - \sqrt{z(2c-z)}\,\Big|_{y_a-y}^{0} = \boxed{\sqrt{(y_a-y)(2c-(y_a-y))} - c\arccos\left(\frac{c-(y_a-y)}{c}\right)}$$

$$a-t = c(s-\sin s)$$
$$y_a-y = c(1-\cos s)$$

Zykloide



$$t = c(s-\sin s)$$
$$y = c(1-\cos s)$$
$$\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix}$$



4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} L[y] &:= y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t) \\ R_1[y] &:= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1 \\ R_2[y] &:= \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2 \end{aligned}$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \qquad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Beobachtung: Das Problem läßt sich stets auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen zurückführen.

Rückführung auf homogene Randbedingungen.

Sei $y_0(t)$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \quad \text{und} \quad R_2[y_0] = d_2$$

d.h. $y_0(t)$ erfüllt die gegebenenen Randbedingungen.

Wir setzen dann

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

Folgerung:

Löst $y(t)$ das Problem

$$L[y] = h(t), \qquad R_1[y] = d_1, \qquad R_2[y] = d_2,$$

so löst $z(t)$ das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \qquad R_1[z] = 0, \qquad R_2[z] = 0$$

Die Greensche Funktion bei Randwertaufgaben.

1. Randwertaufgaben 2. Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich stets mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen.

2. Dabei erhält man die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

   mit der Greensche Funktion $G(t,\tau)$ und $a \leq t,\tau \leq b$.

3. Entscheidender Vorteil: Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator $L[y]$ ab, aber **nicht** von der Inhomogenität $h(t)$.

4. Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator $L[y]$ bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.