

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden $\mathbf{y}^1(t)$ und $\mathbf{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 14:

a) Man berechne für die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) die allgemeine Lösung des homogenen Systems,

(ii) eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems
(Tipp: $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{a}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$),

(iii) und die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + e^{-x} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\mathbf{y}_p(x) = e^{-x} \mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 15:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} .$$

Aufgabe 16:

Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:

- a) $y''' - 4y'' - 20y' + 48y = 0$,
- b) $y''' - y'' - 15y' - 25y = 0$,
- c) $y'''' - 4y''' - 2y'' + 12y' + 9y = 0$.

Abgabetermin: 7.12. - 11.12.2015 (zu Beginn der Übung)