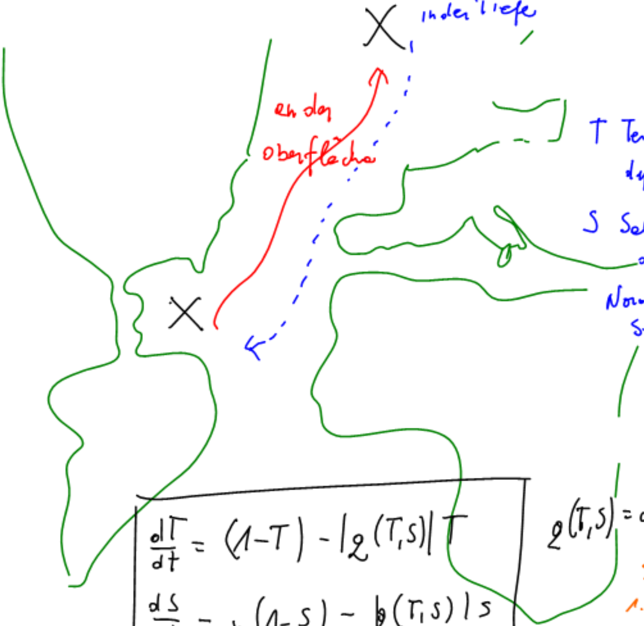


$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (1-T) - |\rho(T,S)|\,T \\ \frac{dS}{dt} &= \gamma(1-S) - |\rho(T,S)|\,S \end{aligned}}$$

$$\rho(T,S) = \alpha T - \beta S$$

System 1. Ordnung autonom.

Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis (Fortsetzung).

Der Schwingkreis wird modelliert durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC\,\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = U(t)$$

Typisch ist die Vorgabe einer Wechselspannung, also $U(t) = U_0\cos(\omega t)$.

Beobachtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{dU_C}{dt}(t_0) = C_2$$

Es existiert auch eine Darstellung als System erster Ordnung,

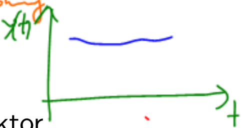
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{R}{L}\,y_2 - \frac{1}{LC}\,y_1 + \frac{1}{LC}\,U \end{aligned}$$

wobei $y_1 := U_c$ und $y_2 := dU_C/dt$.

Das Richtungsfeld einer skalaren Gleichung erster Ordnung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

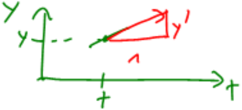
skalar, 1. Ordnung



$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}$$

Betrachte an jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ den Richtungsvektor

wir wissen



$$v = (1, y')^T$$

in der Tangentenrichtung $y' = f(t, y)$.

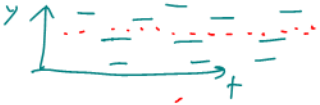
Definition: Ein Tripel $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$, das die Gleichung $y' = f(t, y)$ erfüllt, nennt man ein Linienelement der Differentialgleichung.

Beispiele:

- Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$.
- "Erraten" der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds: Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

i) $y' = 0$

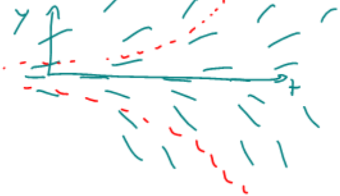


rette $y = c$

ii) $y' = c$

rette $y = c_0 + c\,t$

iii) $y'(t) = y(t)$



$y(t) = c e^t \quad c > 0$

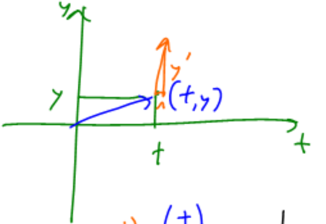
$y(t) = c e^t \quad c < 0$

Ein Beispiel zum Richtungsfeld.

Die Linienelemente der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel $\left(t, y, -\frac{t}{y}\right) \in \mathbb{R}^3$.



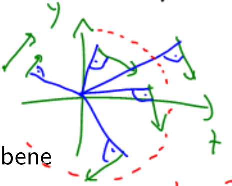
Der Richtungsvektor v im Punkt (t, y) ist gegeben durch

$$(1, y') \cdot \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = t + y'y = t - \frac{t}{y} y = 0$$

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

! $\boxed{v \perp r = (t, y)^T}$ mit dem Ortsvektor r



Die Lösungen sind (geometrisch gesehen) Kreise in der (t, y)–Ebene

geschlossene Kurve? Kreis ?

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \qquad (-r < t < r)$$

$$y' = \pm \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{}} = -\frac{t}{y}$$

1.2 Elementare Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einfachen Methoden zur Berechnung von Lösungen der folgenden einfachen gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen.

- Separierbare Differentialgleichungen
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- Bernoullische Differentialgleichungen
- Riccatische Differentialgleichungen
- Exakte Differentialgleichungen

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

skalar, 1. Ordnung
spezielle rechte Seite

$$\begin{cases} y'(t) & = & f(t) \cdot g(y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

in einem Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der (t, y)–Ebene.

Gilt $g(y) \neq 0$, so lassen sich die Variablen t und y trennen:

$\cdot \frac{1}{g}$

$$\left(\frac{y'(t)}{g(y(t))} = \right) \quad \frac{y'}{g(y)} = f(t)$$

$\int_{t_0}^{t} d\tau$

Integration unter Verwendung der Substitutionsregel ergibt

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\, d\tau = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

$y = y(t)$, $y_0 = y(t_0)$

Separierbare Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir mit $H(y)$ eine Stammfunktion von $1/g(y)$, also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)} \qquad \left(H'(y) = \frac{1}{g(y)} \right)$$

$g \neq 0 \Rightarrow g \gtrless 0 \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)}$ monoton steigend / fallend

so folgt wegen

$$H(y) - H(y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

gerade

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Da $g(y) \neq 0$, ist die Stammfunktion $H(y)$ injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1}\left(H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \right)$$

•) $\boxed{y' = c}$ $\quad + \quad$ $\boxed{y(t_0) = y_0}$

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} c\,d\tau$$

$$y(t) = y(t_0) + c(t - t_0)$$

$f = c \qquad g = 1$

$$H(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int 1\,dy = y$$

$$H^{-1}(z) = z$$

•) $y_h'(t) + a(t)\,y_h(t) = 0$

$$y_h' = -a(t) \cdot y_h$$

$$(\ln|y_h|)' = \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} (\ln y_h)'\,d\tau = -\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$$

$$\ln\left|\frac{y_h(t)}{y_h(t_0)}\right| = \ln|y_h(t)| - \ln|y_h(t_0)|$$

$$\left|\frac{y_h(t)}{y_h(t_0)}\right| = e^{-\int_{t_0}^{t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h(t) = y_h(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}}$$

$f = -a \;,\; g(y) = y$

$$H(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$$

für $y > 0$ $\quad H(y) = \ln y$

$$H^{-1}(z) = e^{z}$$

Ein Beispiel für eine separierbare Differentialgleichung.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$f = -t \qquad g(y) = \frac{1}{y}$

$$\begin{cases} y'(t) &= -t/y \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

$H(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int y\,dy = \frac{y^2}{2}$

Trennung der Variablen ergibt

$H^{-1}(z) = \sqrt{2z}$

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = y\,y' = -t \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \eta\,d\eta = -\int_{t_0}^{t} \tau\,d\tau$$

$H(H^{-1}(z)) = \frac{(\sqrt{2z})^2}{2} = z$

Damit folgt

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2}$$

Wir erhalten also als Lösung einen Kreis um den Ursprung in der (t, y)–Ebene mit Radius r^2.

Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

$y(t) = t\,u(t)$

auf eine separierbare Gleichung zurückführen. Wir schreiben

$$f\left(\frac{y}{t}\right) = f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

Auflösung nach $u'(t)$ ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}$$

Ein Beispiel für eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der y–Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Das Problem wird modelliert durch die zugehörige Differentialgleichung

$$\boxed{y - ty'} = \boxed{\sqrt{t^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}.$$

Wir verwenden die Substitution $u = y/t$: $f(u) = u - \sqrt{1+u^2}$

$$u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{t} = \frac{f(u) - u}{t}$$

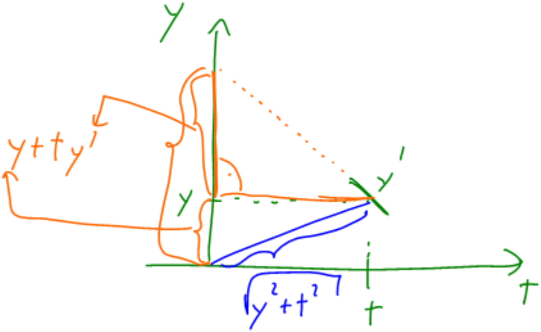
Eine Trennung der Variablen liefert zunächst

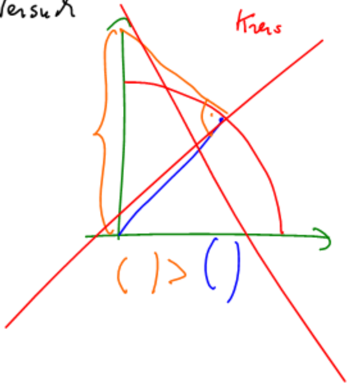
$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\operatorname{arsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = -\ln|t| + C_1$$

Versuch





Fortsetzung des Beispiels.

Aus der Beziehung (siehe Skript Analysis II, Seite 37)

$$\operatorname{arsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

folgt

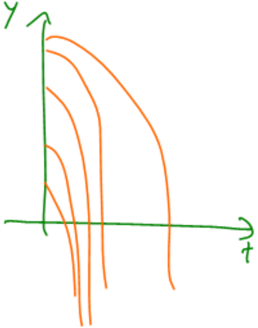
$$u = \sinh(-\ln|t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$u = \frac{y}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{C_1}}{|t|} - |t|e^{-C_1}\right)$$

Wählt man $C = e^{C_1}$, so erhalten wir $t>0$

$$\boxed{2y = C - \frac{t^2}{C}}$$



und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar

$$t^2 = C^2 - 2Cy$$

Typ C: Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t).$$

- Man nennt die Funktion $h(t)$ die Inhomogenität der Gleichung.
- Die Differentialgleichung heißt homogen, falls $h(t) = 0$ gilt.
- Die allgemeine Lösung läßt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

  schreiben.
- Dabei ist $y_p(t)$ eine spezielle (oder partikuläre) Lösung, und $y_h(t)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0$$

y_p Partikulär Lsg.

y allg. Lsg

$$y_p' + a(t)\, y_p = h(t)$$
$$y' + a(t)\, y = h(t)$$

$$\underbrace{(y-y_p)'}_{y_h} + a(t)\underbrace{(y-y_p)}_{y_h} = 0$$

I. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Eine Trennung der Variablen

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

ergibt mit Hilfe einer Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$$

die allgemeine Lösung

$$\boxed{y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)}$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

(allgemein, aber i.A. mühsam)

Dazu verwendet man die Methode der Variation der Konstanten

Ansatz (Versuch)

$$y_p(t) = \underbrace{C(t)}_{\text{gesucht!!}} \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\overbrace{C'(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) \cancel{- a(t)y_p(t)}}^{y_p'} \overbrace{\cancel{+ a(t)y_p(t)}}^{+\,a y_p} \overset{=\,h}{=} h(t)$$

Durch Integration der Differentialgleichung für $C(t)$ erhalten wir

$$C'(t) = h(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(+\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right) d\tau$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right] d\tau \, \exp - \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$