$y(t_0)=y_0$

$y'=0 \qquad y=y_0$

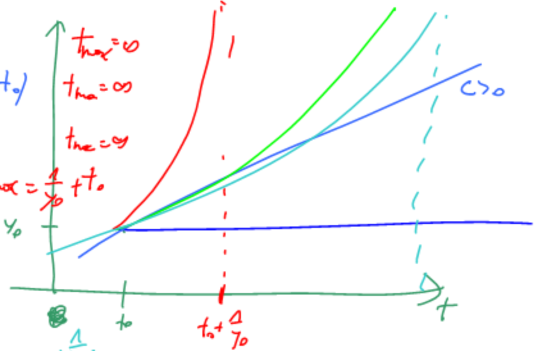
$y'=c \qquad y(t)=y_0+c(t-t_0)$

$y'=y \qquad y(t)=y_0\,e^{(t-t_0)}$

$y'=y^2$ T.d.V. $\qquad y(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{y_0}-(t-t_0)}$

$y'=y^\alpha \qquad 1<\alpha\le 2$ T.d.V.

$y(t)=\left(y_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)(t-t_0)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$



$t_{max}=t_0+\frac{1}{\alpha-1}\,y_0^{1-\alpha}$

beliebig "kleine" Nichtlinearitäten können $t_{max}<\infty$ erzeugen!

3.1 Systeme erster Ordnung

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

mit den stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Satz: Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{y}_p(t)}_{\text{spez. Lsg. inhomogen}} + \underbrace{\mathbf{y}_h(t)}_{\text{allg. Lsg. homogen}}$$

$$y'(t) = A(t)\, y(t) + h(t)$$

$$y_p'(t) = A(t)\, y_p(t) + h(t)$$ Partikuläre Lsg

$$\big(y(t) - y_p(t)\big)' = A(t)\big(y(t) - y_p(t)\big)$$

also löst $y(t) - y_p(t)$ die homogene Gl., weil linear $A(t)y(t) - A(t)y_p(t) = A(t)\big(y(t) - y_p(t)\big)$

zur Erinnerung (skalar)

$y'(t) = a(t)\, y(t)$ $\qquad y(t) = y(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$

im Falle eines Systems $y' = A y$ $\qquad \frac{dy}{y} = A\,dt$ sinnlos! $\left(\frac{\text{Vektor}}{\text{Vektor}}\right)$

Wir betrachten die homogene Anfangswertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{array} \right.$$

Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ist ein Element des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.

Es existiert eine Basisdarstellung der Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$:

Sei $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t)\mathbf{v}^k$$

Mit dem Anfangswert $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ gilt weiterhin

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t) v^k \overset{!}{=} A(t) \sum_{k} \alpha(t) v^k = \sum_{k} \alpha(t) A(t) v^k$$

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_0)\mathbf{v}^k$$

Die Fundamentalmatrix.

Betrachten wir die n Anfangswertprobleme ($k = 1, \ldots, n$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) & = & \mathbf{v}^k \end{cases}$$

$(v^1, \ldots, v^n)$ sei Basis

und definieren damit die Fundamentalmatrix (das Fundamentalsystem)

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

so gilt der folgende Satz.

Satz: Die Matrix $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei ein Fundamentalsystem. Dann gilt:

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t) \qquad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die Fundamentalmatrix ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär.

Da die Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis bilden, ist die Matrix $\mathbf{Y}(t_0)$ regulär, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}^1(t_0), \ldots, \mathbf{y}^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$$

Setzen wir

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t),$$

1. y löst $y' = Ay$

so berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t) \right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

Fortsetzung des Beweises.

2. jede Lsg von $y' = Ay$ hat die Form $y = Y(t)c$

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine beliebige Lösung des Differentialgleichungssystems. Setzen wir

$$\mathbf{c}^* := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}^*(t_0),$$

$y(t_0) = Y(t_0)\, c^* = Y(t_0)\, Y(t_0)^{-1} y^*(t_0) = y^*(t_0)$

so sind

$$\mathbf{y}^*(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$$

beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}^*(t_0) \end{cases}$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$. Also gilt

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Fortsetzung des Beweises.

Wir zeigen nun, dass $\mathbf{Y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär ist.

Für ein festes $t_1 \neq t_0$ zeigen wir

$$\text{Für alle } \mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}^n \;\text{ gibt es ein } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1,$$

denn dann ist $\mathbf{Y}(t_1)$ regulär.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_1) & = & \mathbf{y}_1 \end{cases}$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}$$

mit einem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann.

Für $t = t_1$ gilt dann aber

$$\mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= y_{1_0} e^{t^2} \\ y_2(t) &= y_{2_0} e^{2t^2} \end{aligned}}$$

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y^{1\prime} &= A y^1, \quad y^1(0) = v^1 \quad \Rightarrow y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ y^{2\prime} &= A y^2, \quad y^2(\underset{t_0 = 0}{0}) = v^2 \quad \Rightarrow y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t^2} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ i.a. so nicht möglich

allg. Lsg. homog. Pr.

$$y_h(t) = Y(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \left(y^1(t) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, y^n(t) \right)$$

$$Y'(t) = \left(y^{1\prime}(t) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, y^{n\prime}(t) \right) = \left(A(t) y^1(t) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A(t) y^n(t) \right) = A(t) \left(y^1(t) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, y^n(t) \right)$$

$$= A(t)\, Y(t)$$

Die Wronski–Determinante.

Die $\mathcal{C}^1$–Funktion

$$W(t) = \det(\mathbf{Y}(t))$$

nennt man die Wronski–Determinante zum Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t)$$

Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer skalaren linearen Differentialgleichung

$$W'(t) = \mathrm{Spur}(\mathbf{A}(t)) \cdot W(t)$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}(\mathbf{A}(\tau))\, d\tau \right)$$

Das inhomogene Differentialgleichungssystem.

Wir betrachten jetzt die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{array} \right.$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie bei einer skalaren Gleichung eine Variation der Konstanten

Ansatz !!

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \boxed{\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t)} \stackrel{!}{=} A(t)\,y(t) + \boxed{h(t)} \end{array}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Unser Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)$ löst also die inhomogene Gleichung, falls

$$\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t)$$

Da $\mathbf{Y}(t)$ regulär ist, können wir dies auch in der Form $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)$ schreiben. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau)\,d\tau$$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{Y}(t)\Big(\mathbf{c}_0}_{y_h} + \overbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau)\Big)}^{y_p}$$

Insbesondere gilt mit $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{y}_0$ gerade $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ -4t \end{pmatrix}$$

Fs. $$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_h = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}}_{C}$$

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 \\ 0 & e^{-2t^2} \end{pmatrix}$$

$$c(t) = c_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau) h(\tau) d\tau =$$

$$= c_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau^2} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\tau \\ -4\tau \end{pmatrix} d\tau = \dots = \begin{pmatrix} e^{-t^2} - 1 \\ e^{-2t^2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Y(t) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - e^{t^2} \\ 1 - e^{2t^2} \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist dann unabhängig von t und besitzt konstante Koeffizienten.

Ansatz: Wir suchen eine Lösung in der Form

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

$y(t_0) = e^{\lambda t_0} v$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{y} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}\mathbf{y} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}$$

$\Rightarrow \lambda v = A v$

Also ist $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ genau dann eine Lösung, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ ist, denn

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten I.

Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{v} \end{cases}$$

die Lösung $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$.

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, = Y(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix} \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Komlexwertige Fundamentalsysteme.

Beispiel: Wir betrachten das System

$\det(A-\lambda I_2) = (1-\lambda)^2+4 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte und –vektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1+2i, & \mathbf{v}^1 &= (1,-2i)^T \\ \lambda_2 &= 1-2i, = \overline{\lambda_1} & \mathbf{v}^2 &= (1,2i)^T = \overline{v^1} \end{aligned}$$

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber die Eigenvektoren und Eigenwerte sind komplexwertig und ein komplexes Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\,\mathbf{v}_2)$$

Wir suchen aber reellwertige Lösungen!

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten II.

Fall 2: Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.

Dann existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem für $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine komplexwertige Lösung des homogenen Systems mit konstanten reellen Koeffizienten lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Bemerkung: Jede normale und damit jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar.

Komplexe und reellwertige Fundamentalsysteme.

Frage: Kann man aus einem komplexen Fundamentsystem ein reellwertiges Fundamentalsystem konstruieren?

Idee: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist auch der komplex–konjugierte Wert $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert. Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist.

Fazit: Nicht–reelle Eigenwerte und –vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar von Eigenvektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}$$

durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^1(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{y}^2(t) &= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Ein Beispiel zu komplexen/reellen Fundamentalsystemen.

Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, \qquad \mathbf{v}^1 = (1, -2i)^T \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, \qquad \mathbf{v}^2 = (1, 2i)^T \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \qquad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

$$y' = Ay$$

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S^{-1} \big| \; y' = S\Lambda S^{-1} y$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$S = (v^1, \dots, v^n)$$

$$(\underbrace{S^{-1}y}_{z})' = S^{-1}y' = \Lambda \underbrace{(S^{-1}y)}_{z}$$

$$z' = \Lambda z$$