

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) = b(t), \quad b(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin(t) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (1)$$

(i) Skizzieren Sie $(t, b(t))$ für $t \in [-2, 4]$ und erklären Sie warum folgende Gleichung für alle $t \geq 0$ gilt.

$$b(t) = \sin(t) - h_{\frac{\pi}{2}}(t) \cos(t - \frac{\pi}{2}) + h_{\frac{\pi}{2}}(t). \quad (2)$$

(ii) Bestimmen Sie die Laplace Transformierte von b , indem Sie

1. direkt die Definition verwenden

$$B(s) := L[b(t)] := \int_0^{\infty} e^{-st} b(t) dt.$$

2. indem Sie (2) und die Tabellen bzw. Rechenregeln für die Laplace Transformation verwenden.

(iii) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe (1) mit Hilfe der Laplace Transformation.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace Transformation

$$\begin{aligned} u'' - 2(v - u) &= 1 & u(0) &= v(0) = 0 \\ v'' + 2(v - u) &= 0 & u'(0) &= v'(0) = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = ty + t, \quad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens mit den Schrittweiten $h = 0.5$ bzw. $\tilde{h} = 0.25$ Näherungen für $y(1)$. Verwenden Sie zum Vergleich das verbesserte Polygonzug-Verfahren

$$\begin{aligned} t_{k+\frac{1}{2}} &:= t_k + \frac{h}{2}, & k_2 &:= y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k) \approx y(t_{k+\frac{1}{2}}) \\ t_{k+1} &:= t_k + h, & y_{k+1} &:= y_k + h \cdot f(t_{k+\frac{1}{2}}, k_2) \end{aligned}$$

mit den Schrittweiten $h = 0.5$ bzw. $\tilde{h} = 0.25$.

- b) Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und berechnen Sie den exakten Wert $y(1)$.
- c) Fertigen Sie eine Skizze an, in der Sie die exakte Lösung mit den numerischen Lösungen vergleichen.

Abgabetermine: 09.01-13.01.2017 bzw. 23.01-27.01.2017