Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzübung

Zur Verkürzung der Schreibweise verwenden wir das Doetsch-Symbol:

$$F(s) := L\,[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \iff f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$$

Folgende Korrespondenzen bzw. Zusammenhänge für $\operatorname{Re}(s) > r$, die entweder in der Vorlesung bewiesen wurden oder völlig analog zum Vorgehen in der Vorlesung bewiesen werden können, dürfen benutzt werden.

f	F	r
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(a)$
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0

Wobei $\qquad h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a, \\ 0 & t < a. \end{cases}$

Falls $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$, dann gelten folgende Verschiebungssätze.

$I)$	$h_a(t)f(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa}F(s)$	Verschiebung im Originalraum Mult. mit exp-Fkt im Bildraum
$II)$	$e^{at}f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im Originalraum

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + y = \sin(4t) + te^{-t}\,, \text{ für } t > 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\, y'(0) = 0\,.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

Bitte belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

b) Es sei $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2}$ die Laplace-transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f : t \mapsto f(t)\,.$$

Bestimmen Sie $f(t)$.

Aufgabe 2:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplace Transformation.

a) $y'' + y = e^{-t}\sin(2t)\,, \qquad y(0) = \alpha,\, y'(0) = \beta\,.$

b) $y'' + 9y = h_1(t) - h_2(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$

Bearbeitungstermine: 09.01.-13.01.2017