Buch Kap. 11.6 – LAPLACE-Transformation

Definition 11.4: Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Ordnet man f aufgrund der Beziehung

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\,t}\, f(t)\, dt\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

die Funktion F zu, so nennt man F die LAPLACE-Transformierte von f. Die Abbildung von f auf F heißt LAPLACE-Transformation. Neben $F(z)$ verwendet man auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$. Die LAPLACE-Transformierte $F(z)$ nennt man auch Unterfunktion von f, und f heißt Originalfunktion (oder Oberfunktion).

Definition 11.5: Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung γ, falls es Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle t mit $0 \le t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \le M\, e^{\gamma\, t}\,.$$

Buch Kap. 11.6 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.11 (Existenz der LAPLACE-Transformierten): Sei f in $[0, \infty[$ stückweise stetig (lokal integrierbar reicht aus) und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > \gamma$.

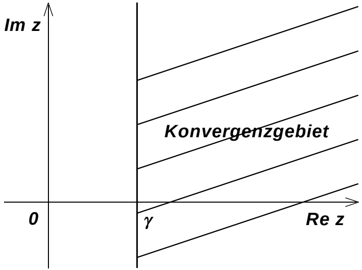

Abbildung 11.3:Konvergenzhalbebene der LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6 – LAPLACE-Transformation

Beispiele:

1) Für die Heaviside-Funktion

$$h_a(t) := \theta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty \leq t < a \\ 1 & \text{für} \quad t \geq a \end{cases}$$

berechnet man für Re $z > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_a(t)] &= \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-zt} \cdot 1\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{z}(e^{-az} - e^{-Az}) = \begin{cases} \frac{e^{-az}}{z} & \text{für} \quad a \neq 0 \\ \frac{1}{z} & \text{für} \quad a = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

2) Für die Exponentialfunktion e^{at} berechnet man für Re $z > a$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-zt} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-z)t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{(a-z)t}}{a-z}\bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{z-a}\,.$$

Buch Kap. 11.7 – LAPLACE-Transformation

Für dieses Resultat benötigen wir ein wenig Funktionentheorie $\rightarrow$ nächstes Semester.
Satz 11.12 (Umkehrsatz für die LAPLACE-Transformation): Die Funktion f sei von exponentieller Ordnung γ, verschwinde für $t < 0$ und sei in $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Dann gilt für alle $x = \operatorname{Re} z > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)\, e^{z\,t}\, dz \quad =$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+i\,s) e^{(x+i\,s)t}\, ds \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{für} \quad t > 0, \\ \frac{f(0+0)}{2} & \text{für} \quad t = 0, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)\, e^{z\,t}\, dz, \quad x > \gamma, \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+i\,s) e^{(x+i\,s)t}\, ds\,. \end{aligned}$$

Buch Kap. 11.7 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.13 (Eindeutigkeitssatz): Für die Funktionen f_1 und f_2 seien die Voraussetzungen von Satz 11.12 erfüllt. Ferner gelte $F_1(z) = F_2(z)$ für $\mathit{Re}\, z > \gamma$. Dann gilt in jedem gemeinsamen Stetigkeitspunkt von f_1 und f_2

$$f_1(t) = f_2(t)\ .$$

Mit diesem Eindeutigkeitssatz ist es nun möglich, von einer LAPLACE-Transformierten $F(z)$ auf die eindeutig bestimmte Funktion $f(t)$ mit

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(z)$$

zu schließen.

Buch Kap. 11.7 – LAPLACE-Transformation

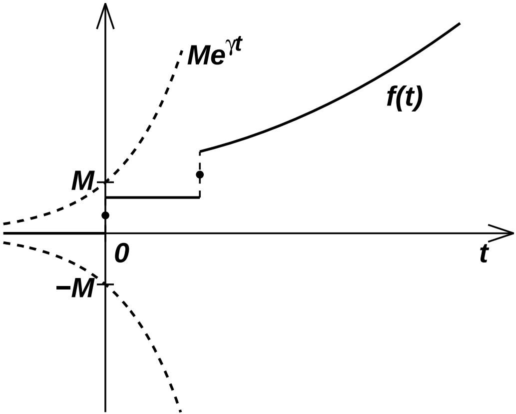

Abbildung 11.5: Voraussetzungen der Sätze 11.12 und 11.13: $f(t)$ von exponentieller Ordnung, stückweise glatt, $f(t) \equiv 0$ für $t < 0$.

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Alle auftretenden Funktionen seien von exponentieller Ordnung γ.
Satz 11.14 (Linearität der Laplace Transformation): Seien *f* und *g* in $[0, \infty[$ stückweise stetige Funktionen. Dann gilt für beliebige reelle Koeffizienten *a*, *b*

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \ .$$

Satz 11.15 (Transformation der Ableitung und des Integrals).
a) Die Funktion *f* sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \ .$$

b) Die Funktion *f* sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k\,\mathcal{L}[f(t)] - z^{k-1}\,f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0) \ .$$

c) Die Funktion *f* sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann gilt für $Re\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)] \ .$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.16:(LAPLACE-Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion): $f(t)$ habe an der Stelle $t = a > 0$ eine Sprungstelle. Ansonsten seien die Voraussetzungen des Satzes 11.15 a) erfüllt. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-az} \ .$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.17 (Dämpfung-Verschiebung, Streckung): Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion von exponentieller Ordnung γ,

$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \ (\mathrm{Re}\, z > \gamma).$$

a) Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich, d.h.,

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(z+a) \quad \text{für} \quad Re\, z > \gamma - a\ .$$

b) Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{z}{a})\ , \quad \text{für} \quad Re\, z > a \cdot \gamma\ .$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Definition 11.6 (Faltung). Unter dem Faltungsprodukt der Funktionen f und g wollen wir allgemein

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

verstehen. Dabei sei die Existenz des uneigentlichen Integrals vorausgesetzt.

Satz 11.18 (Faltungsregel): Die Funktion f sei in $\mathbb{R}$ stetig, die Funktion g stückweise stetig. Beide seien von exponentieller Ordnung γ, und es gelte $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte der Faltung $f * g$ für $Re\, z > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]\ ,$$

Buch Kap. 11.6 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.19 (LAPLACE-Transformation einer T-periodischen Funktion). Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine T-periodische, stückweise stetige und beschränkte Funktion. Dann gilt für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zu} f(u)\, du \; .$$

Satz 11.20 (LAPLACE-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion). Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f LAPLACE-transformierbar sowie $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ die LAPLACE-Transformierte von f. Dann gilt

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(z) \; .$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Satz 11.21 (Verschiebungssatz, Transformation eines plötzlichen Einschaltvorgangs). Sei $g(t)$ eine stückweise stetige Funktion und a eine positive Zahl. Dann gilt

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)g(t-a)] = e^{-az}\mathcal{L}[g(t)] \; .$$

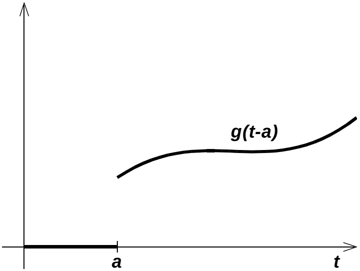

Abbildung 11.7: Aktivierung einer Störung $g(t-a)$ zum Zeitpunkt $t = a$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Beispiele:

1) Wir suchen die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sin(\alpha t)$ mit $\alpha \neq 0$. Sei zunächst $\alpha = 1$. Zwei Wege führen zu dem gleichen Ergebnis:

a) Direkte Auswertung des Laplace-Integrals mittels zweimaliger partieller Integration (Voraussetzung: Re $z > 0$).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin t] &= \int_0^\infty e^{-zt} \sin t \, dt = -e^{-zt} \cos t|_0^\infty - z \int_0^\infty e^{-zt} \cos t \, dt \\
&= 1 - z[e^{-zt} \sin t|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} \sin t \, dt] \\
&= 1 - z^2 \int_0^\infty e^{-zt} \sin t \, dt = 1 - z^2 \mathcal{L}[\sin t].
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1 + z^2} \,. \tag{6}$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Beispiele:

1) Wir suchen die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sin(\alpha t)$ mit $\alpha \neq 0$. Sei zunächst $\alpha = 1$. Zweiter Weg:

b) Anwendung des Satzes 11.19.
Mit zweimaliger partieller Integration (analog zu (a)) erhält man

$$\int_0^{2\pi} e^{-zu} \sin u \, du = \frac{1 - e^{-2\pi z}}{1 + z^2} \ ,$$

also nach Satz 11.19 $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1+z^2}$ (Re $z > 0$). Nach Satz 11.17 b) gilt im allgemeinen Fall $\alpha \neq 0$ (für Re $z > 0$, wegen $\gamma = 0$)

$$\mathcal{L}[\sin(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + (\frac{z}{\alpha})^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2} \ .$$

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Beispiele weiter:

2) Bestimmung von $\mathcal{L}[\cos(\alpha t)]$.
Aus $\mathcal{L}[\sin(\alpha t)]$ lässt sich nach Satz 11.15 leicht

$$\mathcal{L}[\alpha \cos(\alpha t)] = z\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2} - 0 = \frac{z\alpha}{\alpha^2 + z^2}$$

folgern, woraus man mittels Satz 11.14 die Laplace-Transformierte von $\cos(\alpha t)$

$$\mathcal{L}[\cos(\alpha t)] = \frac{z}{\alpha^2 + z^2}$$

erhält.

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

Beispiele weiter:

3) Wir wollen für $f(t) = \sin(\alpha t)$ den Satz 11.15 b) für $k = 4$ verifizieren (Re $z > 0$). Es ist $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -\alpha^3$. Es folgt für $k = 4$

$$\mathcal{L}[f^{(4)}(t)] = z^4 \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2} - z^3 \cdot 0 - z^2\alpha - z \cdot 0 + \alpha^3 = \frac{\alpha^5}{\alpha^2 + z^2} \ .$$

Andererseits ist mit $f^{(4)}(t) = \alpha^4 \sin(\alpha t)$ nach Satz 11.14

$$\mathcal{L}[\alpha^4 \sin(\alpha t)] = \alpha^4 \mathcal{L}[\sin(\alpha t)] = \frac{\alpha^5}{\alpha^2 + z^2} \ ,$$

womit Satz 11.15 b) an einem Beispiel verifiziert ist.

Buch Kap. 11.8 – LAPLACE-Transformation

DGL-Beispiel:

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$u' = u + 5v \ , \qquad v' = -(u + 3v) \ ,$$

wobei als Anfangswerte $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$ vorgegeben sind. Die Laplace-Transformation der Differentialgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} -u(0) + z\mathcal{L}[u] &= \mathcal{L}[u] + 5\mathcal{L}[v] \\ -v(0) + z\mathcal{L}[v] &= -\mathcal{L}[u] - 3\mathcal{L}[v] \ . \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Anfangsbedingungen führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (z-1)\mathcal{L}[u] - 5\mathcal{L}[v] &= 1 \\ \mathcal{L}[u] + (z+3)\mathcal{L}[v] &= 0 \end{aligned}$$

für die Laplace-Transformierten von u und v mit den Lösungen

$$\mathcal{L}[u] = \frac{z+3}{z^2 + 2z + 2} \ , \quad \mathcal{L}[v] = \frac{-1}{z^2 + 2z + 2} \ .$$

Eine quadratische Ergänzung des Nennerpolynoms führt auf die Darstellung

$$\mathcal{L}[u] = \frac{(z+1)}{(z+1)^2 + 1} + \frac{2}{(z+1)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[v] = \frac{-1}{(z+1)^2 + 1} \ ,$$

und damit kann man aus der Tabelle im Anhang des Buchs

$$\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x] \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}[v] = \mathcal{L}[-e^{-x} \sin x]$$

ablesen. Der Eindeutigkeitssatz ergibt die Lösungen des ursprünglichen gekoppelten Differentialgleichungssystems

$$u(x) = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x) \quad \text{und} \quad v(x) = -e^{-x} \sin x \ .$$