Differentialgleichungen I
TUHH
VL 3, 1. November 2016

Differentialgleichungen erster Ordnung, Systeme

Michael Hinze

Differentialgleichungssystem

i) Symbiotischer Prozess

$P(t)$, $Q(t)$ Populationen

$P(t_0) = P_0$, $Q(t_0) = Q_0$

Ausgangspopulationen

Symbiose: Populationen fördern sich gegenseitig

Modell

$$P'(t) = \alpha\, Q(t)$$
$$Q'(t) = \beta\, P(t)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (beide >0, falls Symbiose "nett")

System von Differentialgleichungen für P und Q. Setze

$Y := \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$. Dann gilt $Y'(t) = \begin{bmatrix} P'(t) \\ Q'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$

$= A\, Y(t)$, $Y(0) = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} =: Y_0$

D.h. wir erhalten das AWP

$Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ DGL-System $\rightsquigarrow$ $Y(t) = Y_0 e^{At}$

mit Matrix-Exponentialfunktion $e^{At} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} t^i$ $\hookrightarrow$ später.

Def. 1 Ein System von der Form

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + G(t)$$

mit $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ und $G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$ $(*)$,

heißt lineares DGL-System erster Ordnung. Wird zusätzlich $Y(t_0) := Y_0$ gefordert, ergibt eine AWP erster Ordnung (für das DGL-System $(*)$)

Bem: $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ 2×2 Matrix, $n=2$, $y_1(t) = P(t)$, $y_2(t) = Q(t)$.

Bsp ii) : Räuber-Beute-Modell für Populationen P und Q

$$P'(t) = -\alpha_1 P(t) + \beta_1 P(t) Q(t)$$
$$Q'(t) = \alpha_2 Q(t) - \beta_2 P(t) Q(t)$$

$Y(t) := \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$ ergibt sich

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 P(t) \\ -\beta_2 Q(t) & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{A\left(\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = A(Y)\, Y, \quad Y(t_0) = Y_0 := \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

nichtlineares DGL System,

weil die Matrix A von der Lösung Y abhängt.

Studium nichtlinearer Prozesse gelingt mit dem Wissen um lineare Prozesse $\Rightarrow$ Studieren

(1) $$Y'(t) = A(t)\,Y(t) + G(t) \quad , \quad Y(t_0) = Y_0$$

$G \equiv 0$, so heißt System homogen

i.) Existenz von Lösungen zu (1). Dazu sei $t \mapsto A(t)$ stetig und $t \mapsto G(t)$ stetig.

Setze $f(t,Y) := A(t)\,Y + G(t)$. Dann ist (1) $\Longleftrightarrow$

$$Y' = f(t,Y) \quad , \quad Y(t_0) = Y_0$$

mit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bzgl. Y. Damit liefert Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass (1) genau eine Lösung $Y(t)$ besitzt! $\equiv$ Satz von Picard-Lindelöf.

f L-stetig, weil

$$\| f(t,Y_1) - f(t,Y_2) \| = \| A(t)(Y_1 - Y_2) \| \le \underbrace{\max_{t\in[a,b]} \max_{1\le i,j \le n} |a_{ij}(t)|}_{=:L} \, \|Y_1 - Y_2\| .$$

Beschreibe Lösungsmenge von (1)

a.) homogene Gleichung, d.h. $G(t) \equiv 0$

Stelle fest: Y^1 und Y^2 Lösungen von $Y' = AY$, so auch $\alpha Y^1 + \beta Y^2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig, denn

$$(\alpha Y^1 + \beta Y^2)' = \alpha Y^{1\,\prime} + \beta Y^{2\,\prime} = \alpha A(t) Y^1 + \beta A(t) Y^2$$
$$= A(t)(\alpha Y^1 + \beta Y^2)$$

D.h. Lösungsmenge ist ein linearer Raum im $\mathbb{R}^n$. Wir können also nach linear unabhängigen Lösungen fragen.

<u>Def.</u> i) n linear unabhängige Lösungen $Y^1, \dots, Y^n$ von $Y' = A(t)Y$ heißen Fundamentalsystem von Lösungen zu (1).

Notation
$$F(t) := [Y^1(t), \dots, Y^n(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (n \times n\text{-Matrix})$$

ii) $W(t) := \det F(t)$ Wronski Determinante

Damit: $F(t)$ Fundamentalsystem gdw $W(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Wronski-Test: $w^1, \dots, w^n$ Lösungen von $Y' = A(t)Y$. Ist dann $\det[w^1(t), \dots, w^n(t)] \neq 0$, so bilden $w^1, \dots, w^n$ FS!

<u>Merke</u>: Sei $Y^1, \dots, Y^n$ FS zu (1). Dann hat die Lösungsmenge von $Y' = A(t)\,Y$ die Form

$$Y(t) = \underbrace{F(t)\,C}_{\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i(t)} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}^n.$$

Bestimmen einzige Lösung zum AW Y_0:

$$Y_0 = Y(0) = F(0)\,C \quad \to \quad C = F(0)^{-1} Y_0$$

OE $t_0 = 0$

lineares GLS zur Bestimmung von C.

<u>Lösungsmenge des inhomogenen Systems</u>

$$Y(t) = Y_{inh}(t) + Y_{hom}(t) \quad \text{mit } Y_{hom}(t) = \underbrace{F(t)\,C}_{\sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{Y^i(t)}_{\text{Element eines FS.}}}$$

<u>Frage</u>: Wie erhalten wir $Y_{inh}(t)$?

Mit Hilfe der Variation der Konstanten

<u>Ansatz</u> $Y_{inh}(t) = F(t)\,C(t)$ in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} Y_{inh}'(t) &= F'(t)\,C(t) + F(t)\,C'(t) \\ &= A(t)\,F(t)\,C(t) + F(t)\,C'(t) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{Y_{inh}(t)}$$

$$\overset{\text{DGL}}{=} F(t)\, Y_{inh}(t) + G(t)$$

$$\longrightarrow \quad F(t)\, C'(t) \overset{!}{=} G(t)$$

$F(t)$ invertierbar!

bzw
$$C(t) = \int F(t)^{-1} G(t)\, dt + D$$

$D \rightsquigarrow$ Integrationskonstante (wird in homogener Lösung kompensiert).

<u>Also</u>
$$Y_{inh}(t) = F(t) \int F(t)^{-1} G(t)\, dt$$