29.11.16 [redacted]

1

DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t),$$

zunächst homogen, d.h. $g(t)=0$.

Assoziiertes System

$$y' = Ay + G(t)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

und $G(t) = [0, 0, \dots, g(t)]^t$,

$$y = [z, z', \dots, z^{(n-1)}].$$

Homogen:

$$y' = Ay$$

und λ EW von A mit Vielfachheit $\sigma \geq 1$. Dann

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v_k$$

für $k = 1, \dots, \sigma$ l. u. Lösungen, wobei v_k Hauptvektoren zu λ, d.h.

$$(A - \lambda I)^{\sigma} v_k = 0 \qquad k = 1, \dots, \sigma$$

29.11.16 [redacted]

Hauptvektoren berechenbar gemäß: v_1 EV,

v_2 aus $(A-\lambda I)v_2 = v_1$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^2 v_2 = (A-\lambda I)v_1 = 0$

v_3 aus $(A-\lambda I)v_3 = v_2$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^3 v_3 = 0$

$\vdots$

v_r aus $(A-\lambda I)v_r = v_{r-1}$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^r v_r = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_r$ erfüllen

$(A-\lambda I)^r v_k = 0 \quad k = 1, \dots, r$

(2) Zu v_k gibt es $y_k(t) =$

$= [z_k(t), z_k'(t), \dots, z_k^{(n-1)}(t)]^t$

Damit ergibt sich

$z_1(t) =$ erste Komponente von $y_1(t)$,

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!}(A-\lambda I)^j v_1$$

$$= e^{\lambda t} v_1 .$$

Schreibe $v_1 = [v_1^1, \dots, v_1^n]$, so gilt

$z_1(t) = e^{\lambda t} v_1^1$

Analog mit $v_2 = [v_2^1, \dots, v_2^n]$

$\Rightarrow z_2(t) = e^{\lambda t}(v_2^1 + v_1^1 t)$

$(A-\lambda I)v_2 = v_1$

29.11.16 [redacted]

$\vdots$

$$z_r(t) = e^{\lambda t}\left(v_r^1 + v_{r-1}^1 t + \frac{1}{2} v_{r-2}^1 t^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!} v_1^1 t^{r-1}\right)$$

Wichtig: $v_1^1 \neq 0$,

denn $v_1^1 = 0$ meint $z_1(t) \equiv 0$, also könnte z_1 nicht zu FS gehören.

$v_1^1 \neq 0$, weil aus

$$(A - \lambda I) v_1 = 0$$

③ bereits

$$v_1^2 = \lambda v_1^1$$

$$\vdots$$

$$v_1^n = \lambda v_1^{n-1} = \dots = \lambda^{n-1} v_1^1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} v_1^1 \\ \lambda v_1^1 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} v_1^1 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ weil}$$

v_1 EV von A, also $v_1^1 \neq 0$

Konsequenz: $z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t)$ sind alle l.u., bilden also ein FS, denn $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$ l.u.

29.11.16 [redacted]

Inhomogenes System:

$$z(t) = z_p(t) + z_h(t)$$

mit

$$z_h(t) = c_1 z_1(t) + \dots + c_n z_n(t),$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ FS zu

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = 0.$$

$z_p(t)$ = erste Komponente von

$$y_p(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} G(t)\, dt,$$

wobei

$$Y(t) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n}$$

④ Bsp $\quad z''(t) + a z'(t) + b z(t) = g(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad \text{EW'e aus}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-a-\lambda) - (-b) = \lambda^2 + a\lambda + b \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$b \neq \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow z_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Damit ergibt sich (s. VL. 24.11.)

$$z_p(t) = -z_1(t) \int \frac{z_2(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt$$

Allgemeine Lsg: $\quad z(t) = z_p(t) + z_h(t).$

29.11.16 [redacted]

Dabei:

$$z_h(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Beachte: $b = \frac{a^2}{4}$. Dann

λ doppelter EW, $\lambda = -\frac{a}{2}$

Dann $z_1(t) = e^{\lambda t}$, $z_2(t) = t\, e^{\lambda t}$

α.) $a = 5$, $b = 6$, $g(t) = t\, e^{-t}$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

$$z_1(t) = e^{-2t}, \quad z_2(t) = e^{-3t}$$

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} = -e^{-5t}$$

5

$$\frac{z_2(t)\, g(t)}{W(t)} = \frac{e^{-3t}\, t\, e^{-t}}{-e^{-5t}} = -t\, e^{t}$$

$$\frac{z_1(t)\, g(t)}{W(t)} = -t\, e^{2t}$$

$$\Rightarrow \int \frac{z_2(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt = -\int t\, e^{t}\, dt$$

$$= -t\, e^{t} + e^{t}$$

$$\int \frac{z_1(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt = -\int t\, e^{2t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} t\, e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$\Rightarrow z_p(t) = e^{-2t} \{ t\, e^{t} - e^{t} \}$$

$$+ e^{-3t} \{ -\frac{1}{2} t\, e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t} \}$$

$$= \frac{1}{2} t\, e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-t} = z_p(t).$$

29.11.16 [redacted]

Anfangswerte bestimmen Lsg eindeutig. z.Bsp

$$z(1)=1,\quad z'(1)=1$$

$$\Rightarrow\quad c_1=5,\quad c_2=-13/4$$

β) $a=0$, $b=\omega_0^2$, $g(t)=\sin\omega t$, d.h.

$$z''+\omega_0^2 z=\sin\omega t$$

EW'e von A aus

$$\lambda^2+\omega_0^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_{1/2}=\pm\omega_0 i$$

(b)

FS : $z_1(t)=e^{\omega_0 i t}$, $z_2(t)=e^{-\omega_0 i t}$

$$z_1(t)=\cos\omega_0 t+i\sin\omega_0 t$$

$$z_2(t)=\cos\omega_0 t-i\sin\omega_0 t$$

Reelles FS: $z_1(t)=\cos\omega_0 t$

$z_2(t)=\sin\omega_0 t$

$$W(t)=\det\begin{bmatrix}\cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t\\ -\omega_0\sin\omega_0 t & \omega_0\cos\omega_0 t\end{bmatrix}$$

$$=\omega_0$$

$$z_p(t)=-\frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t\int\sin\omega_0 t\,\overbrace{\sin\omega t}^{g(t)}\,dt$$

$$+\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\int\cos\omega_0 t\,\sin\omega t\,dt$$

29.11.16 [redacted]

Es gilt

$$\int \sin\omega_0 t \,\sin\omega t \, dt = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega_0-\omega)t}{2(\omega_0-\omega)} - \dfrac{\sin(\omega_0+\omega)t}{2(\omega_0+\omega)}, & \omega_0\neq\omega \\[2ex] \dfrac{1}{2} t - \dfrac{1}{4\omega_0}\sin 2\omega_0 t, & \omega_0=\omega \end{cases}$$

$$\int \cos\omega_0 t \,\sin\omega t \, dt = \begin{cases} -\dfrac{\cos(\omega_0+\omega)t}{2(\omega_0+\omega)} - \dfrac{\cos(\omega_0-\omega)t}{2(\omega_0-\omega)}, & \omega_0\neq\omega \\[2ex] \dfrac{1}{2\omega_0}\sin^2\omega_0 t, & \omega=\omega_0 \end{cases}$$

(7) Damit für $\omega\neq\omega_0$:

$$z(t) = z_p(t) + a_1\cos\omega_0 t + a_2\sin\omega_0 t$$

mit z_p wie oben (beschränkt)

$\hat{=}$ Schwingung mit konstanter Amplitude

$\underline{\omega=\omega_0}$: Resonanzfall

$z(t) = -\dfrac{1}{2\omega_0} t \cos\omega_0 t$ + Schwingung beschränkter Amplitude

29.11.16 [redacted]

Bemerkungen zu DGLen n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t)$$

homogen: $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad z^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$$

Damit $z(t) = e^{\lambda t}$ löst homogen Gl. gdw

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) = 0,$$

d.h. wenn

① λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

darstellt.

Beachte: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, wobei A Matrix des assoziierten Systems.

Merke:

i.) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n paarweise verschiedene Nullstellen von $P(\lambda)$, so bilden $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ FS der homogenen Gleichung.

29.11.16 [redacted]

ii) Zu jeder k-fachen Nullstelle λ_r sind die Funktionen

$$e^{\lambda_r t},\ t\,e^{\lambda_r t},\ \dots,\ t^{k-1} e^{\lambda_r t}$$

Lösungen der homogenen Gleichung.

iii) $\lambda_k = \sigma_k + i\,J_k$ komplexe Nullstelle, so sind

$$e^{\sigma_k t}\cos J_k t,\ e^{\sigma_k t}\sin J_k t$$

reelle Lösungen der homogenen Gleichung.

(2) Inhomogener Fall, Ansätze zur Bestimmung partikulärer Lösungen:

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t)$$

$$z(t) = z_p(t) + \underbrace{z_h(t)}_{\text{bestimmt durch EWe}}$$

Ansätze

$g(t)$	$z_p(t)$
i) $p_m(t)$ (Polynom m-ten Grades)	i) $q_m(t)$ (Polynom m-ten Grades
ii) $p_m(t)\,e^{\alpha t}$	ii) $q_m(t)\,e^{\alpha t}$

29.11.16 [redacted]

$g(t)$	$z_p(t)$
iii) $p_m(t)\{\sin\beta t + \cos\beta t\}$	$q_m(t)\sin\beta t + r_m(t)\cos\beta t$ r_m Polynom m-ten Grades
iv) Kombinationen von i)–iii)	Kombinationen von i)–iii)

Beachte: Ist ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen DGL (d.h. dieser Teil entspricht einem Bestandteil von g, der selber Lösung

③ der homogenen DGL ist), so ist dieser Teil des Ansatzes solange (-häufig) mit t zu multiplizieren, bis dieser Teil des Gesamtansatzes nicht mehr Lösung der homogenen DGL ist.

Bsp: $z'' - z = 4e^t$ $g(t)$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1/2} = \pm 1$

$z_1(t) = e^t, \quad z_2(t) = e^{-t}$ FS

$z_p(t) = a\,t\,e^t$, weil e^t die homogene DGL erfüllt

$z_p'' - z_p = 4e^t \Longrightarrow a = 2, \quad z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2te^t$ allg. Lsg