Differentialgleichungen I
TUHH
VL 9, 13. Dezember 2016

Numerische Methoden

Michael Hinze

Anfangswertaufgabe:

$$(P)\quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

f "Idee" vom betrachteten Prozeß

y_0 Anfangszustand

Wie sieht y aus? $\rightarrow$ Richtungsfelder

Frage: Wie bekommen wir (P) "auf den Rechner"?

Grundidee: Gehe zurück zur Modellierung:

$$y'(t) \overset{h \text{ klein}}{\simeq} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$ Damit in (P)

$$y(t+h) - y(t) \simeq h\, f(t, y(t))$$

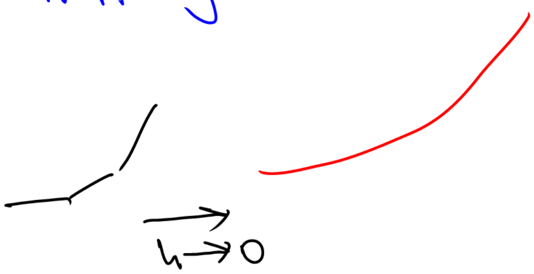
$t_k := t_0 + kh \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$. Damit

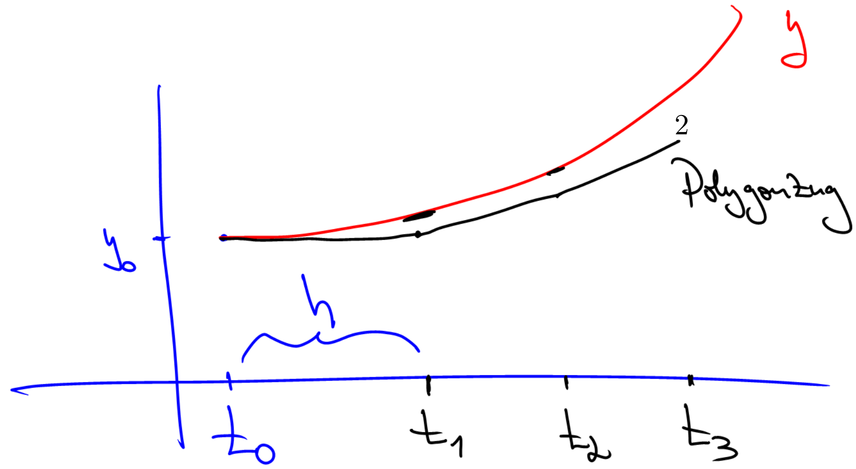
$$y(t_1) - y(t_0) \simeq h\, f(t_0, y(t_0)) \quad \text{bzw} \quad y(t_1) \simeq \underbrace{y(t_0) + h\, f(t_0, y(t_0))}_{\substack{\text{"ausrechenbar"} \\ y_0 + h f(t_0, y_0)}}$$

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$$

Analog: $y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$. Hoffentlich $y_2 \simeq y(t_2)$

Hoffnung





Euler Polygonzug Verfahren zur numerischen Lösung von (P)

i) $k=0$ ii) $y_0 := y(t_0)$, $h>0$ (Schrittweite)

iii) α) $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$

β) $t_{k+1} = t_k + h$

γ) $k = k+1$ und gehe zu α)

Allgemeiner: Betrachte "Verfahren" zur numerischen Lösung von (P)

y_0 gegeben, $k=0$:

$$y_{k+1} = y_k + h\, \Phi(t_k, y_k, h) \qquad (V)$$

mit einer Verfahrensfunktion Φ, die als Realisierung unserer Idee f auf dem Rechner verstanden werden soll.

<u>Bsp</u>: Euler Polygonzugmethode; $\Phi(t,y,h) = f(t,y)$

<u>Fragen</u>: i) Wie "gut" ist das Verfahren (V)? "Gut" meint hier a) kleiner Fehler $e_k := |y_k - y(t_k)|$. Und b) Konsistenz, d.h. wie groß ist

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h),$$

d.h. wie groß ist der Fehler, den ich erhalte, wenn die exakte Lösung y in das Verfahren eingesetzt wird.

Bsp für b) im Polygonzugverfahren:

$$(*) = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k))$$

Es gilt
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k)\underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{h} + \frac{1}{2} y''(t_k)\overbrace{(t_{k+1} - t_k)^2}^{h^2} + \frac{1}{6} y'''(\xi)\underbrace{(t_{k+1} - t_k)^3}_{h^3}$$
$\xi \in (t_k, t_{k+1})$

Ferner: $y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$.

Damit
$$(*) = \frac{1}{2} y''(t_k)\, h + \underbrace{c}_{\text{kommt von } \frac{1}{6} y'''(\xi) h^3} h^2$$

Konsistenzfehler damit

$$\max_k \left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k)) \right| \le \frac{1}{2} h \max_t |y''(t)| + \mathcal{O}(h^2) \quad (h \to 0)$$

D.h. Konsistenzfehler hat die Ordnung h

Was können wir über a) aussagen

$$e_{k+1} = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \overset{(V)}{=} |y(t_{k+1}) - (y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h))| \qquad (1)$$

Verfahren konsistent (mit Ordnung h), d.h.

$$\left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \phi(t_k, y(t_k), h) \right| = \mathcal{O}(h) \quad (h \to 0)$$

$$\rightarrow \quad y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\,\phi(t_k, y(t_k), h) + \mathcal{O}(h^2) \quad (h \to 0)$$

Dies in (1):

$$e_{k+1} = | y(t_k) - y_k + h (\phi(t_k, y(t_k), h) - \phi(t_k, y_k, h))| + O(h^2)$$

$$\leq \underbrace{|y(t_k) - y_k|}_{e_k} + h \, | \phi(t_k, y(t_k), h) - \phi(t_k, y_k, h)| + O(h^2)$$

$f(t_k, y(t_k)) \quad - \quad f(t_k, y_k)$

$|\phi(t_k, y(t_k), h) - \phi(t_k, y_k, h)| \leq L \, |y(t_k) - y_k|$, d.h. Verfahrensfunktion L-stetig bzgl y

$$\leq e_k + h \, L \, |y(t_k) - y_k| + O(h^2)$$

$$= (1+hL) \, e_k + O(h^2)$$

Damit ergibt sich Rekursion für den globalen Diskretisierungsfehler

$$e_{k+1} \leq (1+hL) \, e_k + O(h^2) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Induktiv

$$e_k \leq (1+hL)^k e_0 + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} (1+hL)^j O(h^2)}$$

$$= (1+hL)^k \, e_0 + \frac{(1+hL)^k - 1}{\cancel{h}L} O(h^{\cancel{2}})$$

$$\overset{1+t \leq e^t}{\leq} e^{khL} \underbrace{e_0}_{y_0 - y(t_0)} + \frac{1}{L} O(h) \underbrace{(e^{khL} - 1)}_{\text{beschränkt, weil } k \sim \frac{1}{h}}$$

D.h. für $y_0 = y(t_0)$ ist $e_0 \equiv 0$ und somit

$$\max_k e_k \leq C_1 h \quad \text{mit } C_1 \text{ unabhängig von } h.$$

D.h. (V) konsistent mit h und ϕ L-stetig bzgl y

$\Longrightarrow$ Verfahren konvergiert mit Ordnung h