DGL I

17.10.2017

J. Behrens

① <u>weiteres Beispiel:</u> Radioaktiven Zerfall

zeitlicher Verlauf der Masse eines radioaktiven Stoffes

$m(t)$: Masse zur Zeit t

Erfahrung / Beobachtung

$$m(t+h) - m(t) \sim m(t) \cdot h$$

(h kleines Zeitintervall)

Mit Proportionalitätsfaktor k :

$$\boxed{m(t+h) - m(t) = -k\, m(t)\, h}$$

Division durch h und Grenzübergang ($h \to 0$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{dm}{dt} = -k\, m(t)$$

Vereinfacht:

$$\boxed{m'(t) = -k\, m(t)}$$

mathematisches Modell des radioakt. Zerfalls.

② Beispiele:

i) $y' = \underbrace{\sin x \ \cos y}_{f(x,y)}$ ist eine explizit gegebene DGL 1. Ordnung

$F(x,y,y') := y' - \sin x \ \cos y = 0$ ist die entsprechende implizite Form

ii) $y(x) = e^x$ ist eine Lösung der DGL 1. Ordnung
$$y'(x) = y(x).$$

iii) Im Allgemeinen hat eine DGL unendlich viele Lösungen

$y' = \frac{x}{y}$ hat Lösungen $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C}$ C=Konst. $C \in \mathbb{R}$

um das C nun fest zu legen benötigt man Anfangs- bzw. Randbedingungen.

③ **Beispiel:**

- Die DGL $y' = xy^2 = f(x,y)$ erfüllt die Vor. 2. des Satzes
  $f(x,y)$ ist stetig partiell diff'bar nach y in $D_f = \mathbb{R}^2$
- Lösungsschar: $y = \dfrac{1}{C - \frac{x^2}{2}}$
- Sei nun $y(x_0) = y_0$ $(x_0, y_0) \in D_f$ vorgegeben $(y_0 \neq 0)$
  $\Rightarrow$ $C = \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{x_0^2}{2}$
- Für (x_0, y_0) mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ $\Rightarrow$ $C > 0$
  $$\Rightarrow I =]-\sqrt{2C}, \sqrt{2C}[= \underbrace{]-\sqrt{\tfrac{2}{y_0} + x_0^2}, \sqrt{\tfrac{2}{y_0} + x_0^2}[}_{\text{maximale Definitionsintervall für } y.}$$
- Für $y_0 = 0$ $\Rightarrow$ $y \equiv 0$ $\Rightarrow$ $I = \mathbb{R}$

$\rightarrow$ siehe Abbildung auf Vorlesungsfolien