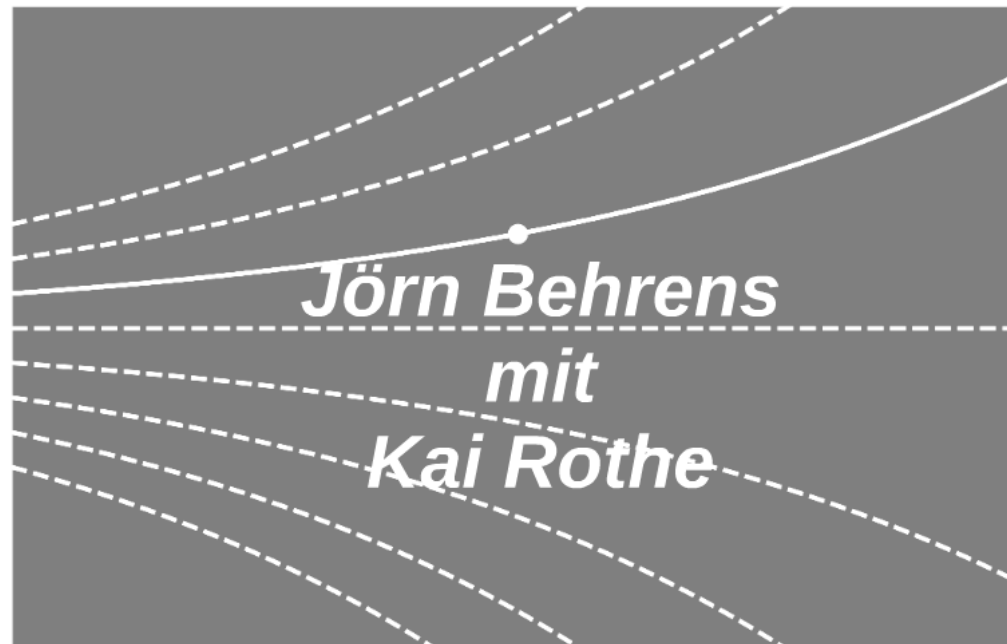


# Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Trennung der Variablen  
Variation der Konstanten

Buch Kapitel 6.4-6.5

# Erinnerung

**Definition** (Gewöhnliche Differentialgleichung):

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** (DGL  $n$ -ter Ordnung) für eine Funktion  $y = y(x)$  ist eine Gleichung zwischen  $x, y$  und den Ableitungen von  $y$  bis einschließlich  $n$ -ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{implizite Form})$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von  $y$  vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{explizite Form}).$$

Bezeichne eine Funktion  $y$ , welche die DGL erfüllt als **Lösung** oder **Integral** der DGL.

2

**Definition** (Anfangs- und Randwerte):

Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen **Anfangsbedingungen**, andernfalls **Randbedingungen**.

Ein **Anfangswertproblem** ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Entsprechend ist ein **Randwertproblem** gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

**DGL 1. Ordnung:**

- Sei die **DGL 1. Ordnung** in expliziter Form gegeben:  $y' = f(x, y)$ .
- Die Paare  $x, y \in D_f$  liegen im **Definitionsbereich** von  $f$ .

**Definition** (Gewöhnliche Differentialgleichung):

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** (DGL  $n$ -ter Ordnung) für eine Funktion  $y = y(x)$  ist eine Gleichung zwischen  $x, y$  und den Ableitungen von  $y$  bis einschließlich  $n$ -ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{implizite Form})$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von  $y$  vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{explizite Form}).$$

Bezeichne eine Funktion  $y$ , welche die DGL erfüllt als **Lösung** oder **Integral** der DGL.

**Definition** (Anfangs- und Randwerte):

Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen **Anfangsbedingungen**, andernfalls **Randbedingungen**.

Ein **Anfangswertproblem** ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Entsprechend ist ein **Randwertproblem** gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

## DGL 1. Ordnung:

- Sei die **DGL 1. Ordnung** in expliziter Form gegeben:  $y' = f(x, y)$ .
- Die Paare  $x, y \in D_f$  liegen im **Definitionsbereich** von  $f$

# DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

## Idee:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

so heißt sie **Differentialgleichung mit trennbaren Variablen**.

Seien  $g(x)$  und  $h(y)$  für  $(x, y) \in D_f$  stetig und  $h(y) \neq 0$ .

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.

- Seien

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t) dt$$

Stammfunktionen zu  $g$  und  $h$ , sowie  $H^{-1}$  Umkehrfunktion von  $H$  (d.h.  $H^{-1}(H(y)) = y$ ).

- Schreibe die DGL in der Form  $h(y)y' = g(x)$  so ergibt Integration die Lösung der DGL:

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt

$$y(x) = H^{-1}(H(y(x))) = H^{-1}(G(x) + C).$$

1

## Lösungsschema:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

und seien  $g(x)$  und  $h(y)$  für  $(x, y) \in D_f$  stetig,  $h(y) \neq 0$ ,  $G(x)$ ,  $H(y)$  wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form  $h(y)y' = g(x)$  bzw.  $h(y)dy = g(x)dx$ .
2. Integriere linke Seite nach  $y$  und rechte Seite nach  $x$ .
3. Falls möglich, löse analytisch nach  $y$  auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung  $y(x)$  in impliziter Form vor.

4. Für  $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$  ergibt sich die Lösung des AWP  $y(x_0) = y_0$ .

**Beispiel:**  
Betrachte

$$y' = \sin x \cos y$$

- Bereiche:  $\sin y \neq 0$  oder  $y \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

• Inhalt:  $\frac{y'}{\cos y} = \sin x \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x dx$

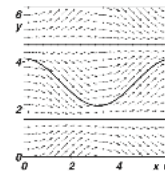
• Integration:  $\ln|\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos x + C_1$

- Auflösung nach  $y$ :

$$y(x) = 2 \arctan(C_0 e^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2}, \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

- Konstante Lösungen:  $y(x) = 0$  +  $\frac{\pi}{2}$

- Richtung: Richtungsfeld



2

### Idee:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

so heist sie **Differentialgleichung mit trennbaren Variablen**.

Seien  $g(x)$  und  $h(y)$  für  $(x, y) \in D_f$  stetig und  $h(y) \neq 0$ .

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.
- Seien

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t) dt$$

Stammfunktionen zu  $g$  und  $h$ , sowie  $H^{-1}$  Umkehrfunktion von  $H$  (d.h.  $H^{-1}(H(y)) = y$ ).

- Schreibe die DGL in der Form  $h(y)y' = g(x)$  so ergibt Integration die Lösung der DGL:

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}[G(x) + C].$$

## Lösungsschema:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien  $g(x)$  und  $h(y)$  für  $(x, y) \in D_f$  stetig,  $h(y) \neq 0$ ,  $G(x)$ ,  $H(y)$  wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form  $h(y)y' = g(x)$  bzw.  $h(y)dy = g(x)dx$ .
2. Integriere linke Seite nach  $y$  und rechte Seite nach  $x$ .
3. Falls möglich, löse analytisch nach  $y$  auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung  $y(x)$  in impliziter Form vor.

4. Für  $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$  ergibt sich die Lösung des AWP  $y(x_0) = y_0$ .



### Beispiel:

Betrachte

$$y' = \sin x \cos y.$$

- Beachte:  $\cos y \neq 0$  oder  $y \neq (k + \frac{1}{2})\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

- Erhalte:

$$\frac{y'}{\cos y} = \sin x \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x \, dx.$$

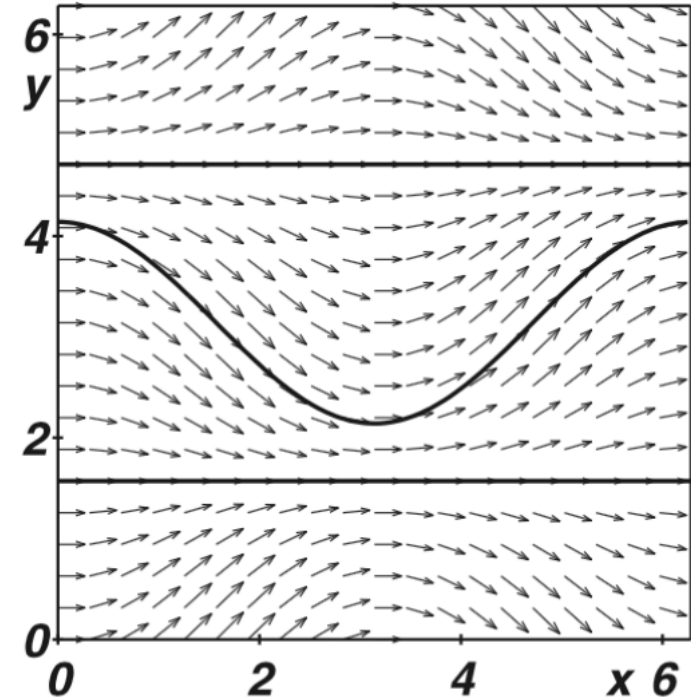
- Integration:  $\ln \left| \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| = -\cos x + C_0.$

- Auflösung nach  $y$ :

$$y(x) = 2 \arctan(Ce^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Konstante Lösungen:  $y(x) \equiv (k + \frac{1}{2})\pi$

- Erinnerung: Richtungsfeld!



# Lineare DGL 1. Ordnung

**Definition:** (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

Betrachte

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten  $(a(x), b(x), c(x))$  stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall  $I$  und  $a(x) \neq 0$ . Diese DGL heißt **lineare DGL 1. Ordnung**, wenn sie linear bezüglich der Lösung  $y(x)$  ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

**Bemerkungen:**

- Unter der Voraussetzung  $a(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ), ergibt sich  $y' + p(x)y = q(x)$  mit  $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ,  $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$  **zwei** stetig
- Existenz und Eindeutigkeit sind immer erfüllt (ohne weiteren Hinweis) wenn in  $I$   $p(x)$  und  $q(x)$  stetig sind.
- Falls  $q(x) = 0$  heißt die DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Beispiel:** (Bernoulli'sche Differentialgleichung)

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha.$$

4

**Lösungsidee 1:**

Die homogene lineare DGL  $y' + p(x)y = 0$  ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen.

Für  $y > 0$  und  $y < 0$  schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = - \int p(x) dx + C_0$$

mit  $|y| = e^{\ln|y|} = e^{-\int p(x) dx} = C e^{-\int p(x) dx}$  ( $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$ ). Dabei ist  $P(x)$  Stammfunktion von  $p(x)$ .

**Lösungsidee 2:** (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL  $y' + p(x)y = 0$  variere  $C$ , d.h. betrachte  $C = C(x)$ .

• Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)},$$

• Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} = p(x)C(x)e^{-P(x)} - q(x).$$

• Umformen und integrieren:

$$C'(x)e^{-P(x)} - q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt + C_1 \quad C_1 = \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}.$$

• Verwendung des Ansatzes:

$$y(x) = e^{-P(x)} \left( C_1 + \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) \\ = C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \\ = \text{Konst.} \cdot \text{Zahl} \cdot e^{-P(x)}$$

3

**Beobachtungen:**

- Differentialquotient bewirkt:

$$y_{xx}(x) = e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

- Da

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-P(x)}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist  $y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{inhom}}$  für jedes  $C_1 \in \mathbb{R}$  Lösung der inhomogenen DGL.

- Andererseits ist jede beliebige Lösung  $\tilde{y}(x)$  der inhomogenen DGL von der Form oben.

**Definition:** (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

Betrachte

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten  $(a(x), b(x), c(x))$  stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall  $I$  und  $a(x) \neq 0$ . Diese DGL heißt **lineare DGL 1. Ordnung**, wenn sie linear bezüglich der Lösung  $y(x)$  ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

**Bemerkungen:**

- Unter der Voraussetzung  $a(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ), ergibt sich

$$y' + p(x)y = q(x)$$

mit  $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ,  $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$  jeweils stetig.

- Existenz und Eindeutigkeit sind immer erfüllt (keine singulären Lösungen) sofern in  $I$   $p(x)$  und  $q(x)$  stetig sind..
- Falls  $q(x) = 0$  heißt die DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

### Lösungsidee 1:

Die homogene lineare DGL  $y' + p(x)y = 0$  ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen!

Für  $y > 0$  und  $y < 0$  schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = - \int p(x) dx + C_0$$

mit  $|y| = e^{C_0} e^{-P(x)}$  bzw.  $y = C e^{-P(x)}$  ( $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$ ).

Dabei ist  $P(x)$  Stammfunktion von  $p(x)$ .

## Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL  $y' + p(x)y = 0$  variiere  $C$ , d.h. betrachte  $C = C(x)$ .

- Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

- Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) &\quad \Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\quad \Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)} \left( C_1 + \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

## Beobachtungen:

- Differentiation beweist:

$$y_{\text{inh}}(x) = e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

- Da

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-P(x)}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist, ist  $y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{inh}}(x)$  für jedes  $C_1 \in \mathbb{R}$  Lösung der inhomogenen DGL.

- Andererseits ist jede beliebige Lösung  $\tilde{y}(x)$  der inhomogenen DLG von der Form oben.

**Beispiel:** (Bernoullische Differentialgleichung)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

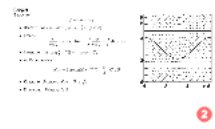


## DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

**Beispiel**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL  $y' = 2xy$ .  
 Lösung:  $y' = 2xy \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 2x dx$   
 $\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$   
 $|y| = e^{x^2 + C} = e^{x^2} \cdot e^C$   
 $y = \pm e^C \cdot e^{x^2} = C \cdot e^{x^2}$

**Lösungsschemata:**  
 Bei einer DGL  $y' = f(x)g(y)$  gilt:  
 1. Trennung der Variablen:  $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$   
 2. Integration beider Seiten  
 3. Auflösen nach  $y$   
 4. Einsetzen der Anfangswerte



## Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Trennung der Variablen  
 Variation der Konstanten

## Erinnerung

**Beispiel:** Lösen Sie die DGL  $y' + y = e^{-x}$ .  
 Lösung:  $y' + y = e^{-x}$   
 Integrationsfunktionsansatz:  $y = u(x)e^{-x}$   
 $y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$   
 $u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = e^{-x}$   
 $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x + C$   
 $y = (x + C)e^{-x}$

## Lineare DGL 1. Ordnung

**Beispiel:** Lösen Sie  $y' + y = 1$ .

Lösung:  $y' + y = 1$   
 Integrationsfunktionsansatz:  $y = u(x)e^{-x}$   
 $y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$   
 $u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = 1$   
 $u'(x) = e^x$   
 $u(x) = e^x + C$   
 $y = (e^x + C)e^{-x} = 1 + Ce^{-x}$

**Beispiel:** Lösen Sie  $y' + y = e^x$ .  
 Lösung:  $y' + y = e^x$   
 Integrationsfunktionsansatz:  $y = u(x)e^{-x}$   
 $y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$   
 $u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = e^x$   
 $u'(x) = e^{2x}$   
 $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$   
 $y = (\frac{1}{2}e^{2x} + C)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$

**Beispiel:** Lösen Sie  $y' + y = x$ .  
 Lösung:  $y' + y = x$   
 Integrationsfunktionsansatz:  $y = u(x)e^{-x}$   
 $y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$   
 $u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = x$   
 $u'(x) = xe^x$   
 $u(x) = (x-1)e^x + C$   
 $y = ((x-1)e^x + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}$

**Beispiel:** Lösen Sie  $y' + y = e^{-x}$ .  
 Lösung:  $y' + y = e^{-x}$   
 Integrationsfunktionsansatz:  $y = u(x)e^{-x}$   
 $y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$   
 $u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = e^{-x}$   
 $u'(x) = 1$   
 $u(x) = x + C$   
 $y = (x + C)e^{-x}$