DGL I

07. 11. 2017

J. Behrens

① Beispiel: $y'' = 5y' \ln x \qquad x > 0$

oder $y'' - 5y' \ln x =: F(x, y', y'') = 0$

- $v = y' \Rightarrow v' = 5 \ln x \; v$
- Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dv}{v} = 5x \ln x - 5x + C$$

$$\Rightarrow \ln|v| = 5x \ln x - 5x + C$$

$$\Rightarrow v = C_1 e^{5x \ln x - 5x} = C_1 x^{5x} e^{-5x} = C_1 \left(\frac{x}{e}\right)^{5x}$$

$v' = \dfrac{5 \ln x}{\frac{1}{v}}$

$\int \frac{dv}{v} = \int 5 \ln x \, dx$

$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$

part. Integration

$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= x \cdot \ln x - x + C$

- Integration

$$y(x) = C_1 \int x^{5x} e^{-5x} \, dx + C_2$$

Lösung der DGL 2. Ordnung

② **Beispiel:** $\quad y'' = -\dfrac{y'^2}{5y} \qquad y > 0$

- $v(y) = y'$ bzw. $y'' = v'v \Rightarrow v v' = \dfrac{-v^2}{5y}$ DGL 1.Ord.

$$\Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{1}{5y}$$

- Trennung der Variablen

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{5} \ln|y| + C$$

$$\Rightarrow v(y) = C_1 \, y^{-\frac{1}{5}}$$

- Wegen $y' = v(y)$

$$\Rightarrow y' = C_1 \, y^{-\frac{1}{5}}$$

NR:

$v(y) = y'(x)$

$\dfrac{dv}{dx} = v'(y) \cdot \underbrace{y'(x)}_{v}$

$v' \cdot v$

- Wende wieder Trennung der Var. an:

$$\int y^{\frac{1}{5}} \, dy = C_1 x + C_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$$

- Damit haben wir die Lösung

$$y(x) = \left[C_3 x + C_4 \right]^{\frac{5}{6}}$$

③ Beispiel: $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2} = \phi(\frac{y}{x})$

- $\phi(u) = \frac{u}{1-u^2}$
- Es gilt: $\int \frac{du}{\frac{u}{1-u^2}-u} = \ln|x|+C$

$\Rightarrow \int \frac{1-u^2}{u-u(1-u^2)} du = \ln|x|+C$

$\Rightarrow \int \frac{1-u^2}{u^3} du = \ln|x|+C$

$\Rightarrow -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x|+C$

- Rücksubstitution:

$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y|+C \Rightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2y^2}-C}$

$\Rightarrow y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$

④ Beispiel: $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ Ansatz $x^r = y(x)$

$\Rightarrow 2 + 4r + r(r-1) = r^2 + 3r + 2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow r_1 = -1$ und $r_2 = -2$

$\Rightarrow y(x) = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{1}{x^2}$