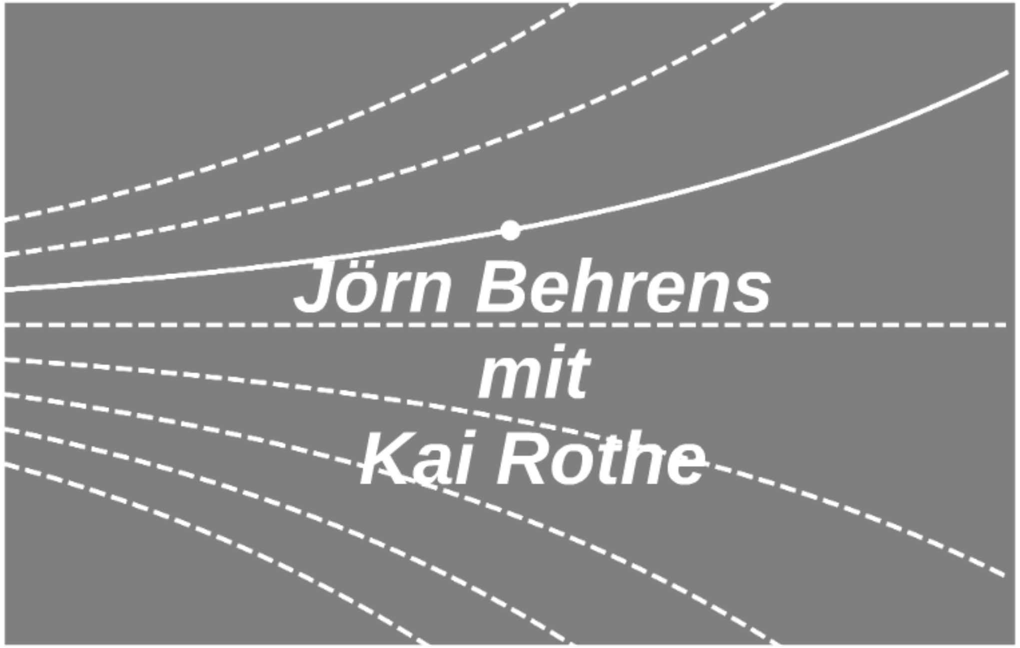
Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Lösung von DGLn durchTransformation

Systeme 1. Ordnung

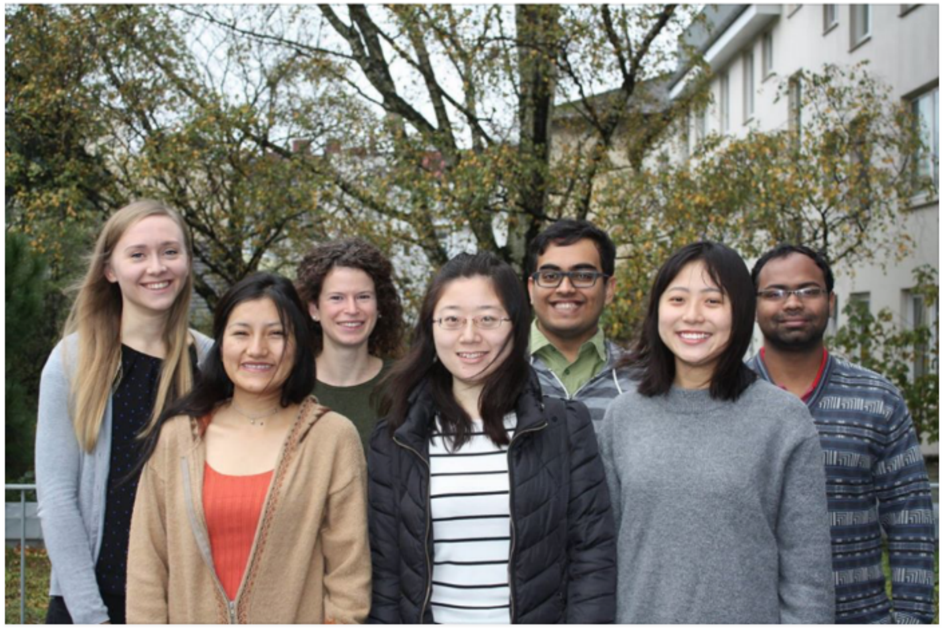
Buch Kapitel 6.6-6.7

SICSS at Universität Hamburg
5 Std. ·

SICSS at #COY13 and #COP23!

The third year in a row, some of our master students attend the Conference of Youth and COP which take place in Bonn, Germany, this year.

Follow their blog here: https://sicsscop22.wordpress.com/



Gefällt mir   Kommentieren   Teilen

Erinnerung:
Trennung der Variablen
Variation der Konstanten

Lösungsschema:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x,y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x.
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

   Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.
4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)
Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C,
d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}$$

- Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad &\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + C_1, \quad C_1 = \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt \\ &= y_{hom}(x) + y_{part}(x). \end{aligned}$$

Lösungsschema:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x.
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

   $$H(y) = G(x) + C.$$

   Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.
4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)
Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C, d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

- Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad &\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

Transformation

Vorbemerkung:

- **Ziel**: Lösung verschiedener DGLn erster und zweiter Ordnung
- **Typ**: Betrachte DGL von der Form

$$F(x, y', y'') = 0$$

Idee:

- **Substitution**: mit $v := y'$ ergibt sich DGL 1. Ordnung:

$$F(x, v, v') = 0$$

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist

$$y(x) = \int \Psi(x, C)\, dx + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung.

1

Betrachte:
Sei nun die DGL 2. Ordnung gegeben, wobei x nicht explizit auftaucht:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $v(y) := y'$ ergibt sich durch die Kettenregel:

$$y'' = \frac{d}{dx} v(y) = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y)$$

Also erhält man eine DGL 1. Ordnung für v: $F(y, v, v'v) = 0$.

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist mit $v(y) = y'$

$$y' = \Psi(y, C)$$

eine DGL mit trennbaren Veränderlichen für y gegeben, mit allgemeiner impliziter Lösung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

2

Betrachte:
Differentialgleichung der Form $y' = \phi(ax + by + c)$, $b \neq 0$. Sei ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$ ergibt sich:

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

und damit

$$z' = a + b\phi(z).$$

- **Trennung der Variablen**: Als Lösung erhält man

$$\frac{dz}{a + b\phi(z)} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{a + b\phi(z)} = \int dx = x + C.$$

Betrachte:
DGL der Form $y' = \phi(\frac{y}{x})$, mit $x \neq 0$ und ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $u = \frac{y}{x}$ ergibt sich:

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' = \phi(u)$$

und damit

$$xu' = \phi(u) - u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x}.$$

- **Trennung der Variablen**: Als Lösung erhält man

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

3

Vorbemerkung:

- **Ziel**: Lösung verschiedener DGLn erster und zweiter Ordnung
- **Typ**: Betrachte DGL von der Form

$$F(x, y', y'') = 0$$

Idee:

- **Substitution**: mit $v := y'$ ergibt sich DGL 1. Ordnung:

$$F(x, v, v') = 0$$

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist

$$y(x) = \int \Psi(x, C)\, dx + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung.

1

Betrachte:
Sei nun die DGL 2. Ordnung gegeben, wobei x nicht explizit auftaucht:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $v(y) := y'$ ergibt sich durch die Kettenregel:

  $$y'' = \frac{d}{dx} v(y) = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y)$$

  Also erhält man eine DGL 1. Ordnung für v: $F(y, v, v'v) = 0$.

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist mit $v(y) = y'$

  $$y' = \Psi(y, C)$$

  eine DGL mit trennbaren Veränderlichen für y gegeben, mit allgemeiner impliziter Lösung

  $$\int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

2

Betrachte:
DGL der Form $y' = \phi(\frac{y}{x})$, mit $x \neq 0$ und ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $u = \frac{y}{x}$ ergibt sich:

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' = \phi(u)$$

und damit

$$xu' = \phi(u) - u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x}.$$

- **Trennung der Variablen**: Als Lösung erhält man

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Betrachte:
Differentialgleichung der Form $y' = \phi(ax + by + c)$, $b \neq 0$. Sei ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$ ergibt sich:

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

  und damit

$$z' = a + b\phi(z).$$

- **Trennung der Variablen**: Als Lösung erhält man

$$\frac{dz}{a + b\phi(z)} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{a + b\phi(z)} = \int dx + C = x + C.$$

Eulersche DGL

Definition:
Differentialgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{(j)}(x) = f(x),$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, \ldots, k$) konstant, $a_k \neq 0$, $x > 0$,
heißen Eulersche Differentialgleichungen k-ter Ordnung.

Lösungsansatz:
Der Ansatz $y(x) = x^r$ für die homogene Gleichung, d.h. $f(x) \equiv 0$, ergibt:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j r(r-1)\cdots(r-j+1) = 0.$$

Erhalte Gleichung, deren Lösung Nullstellen eines Polynoms in r vom Grad k sind.

Berechnung für den Fall $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0 y + a_1 x y' - a_2 x^2 y'' = 0$.
- Substitution ergibt: $a_0 + a_1 r + a_2 r(r-1) = 0$, quadratisches Polynom.
- Differenzieren bestätigt: $y = x^r$ ist Lösung der homogenen Euler DGL, falls r Nullstelle des Polynoms.
- Sind $r_1 \neq r_2$ reelle Nullstellen des Polynoms, so sind $y_1 = x^{r_1}$ und $y_2 = x^{r_2}$ Lösungen der DGL.
- Sind $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen, so ist mit $r_1 = a + ib$ auch $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ Nullstelle.
- Komplexe Lösung für $y = x^r$:

  $$x^{a+ib} = e^{\ln x^{a+ib}} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a\ln x} e^{ib\ln x} = x^a[\cos(b\ln x) - i\sin(b\ln x)]$$

- Für komplexe Lösungen des Nullstellenproblems erhält man daher

  $$y_1(x) = x^a \cos(b\ln x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^a \sin(b\ln x)$$

  zwei Lösung der homogenen Eulerschen DGL.
- Allgemeine Lösung: wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung

  $$y(x) = c_1 x^a \cos(b\ln x) + c_2 x^a \sin(b\ln x).$$

4

Definition:
Differentialgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{(j)}(x) = f(x),$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, \ldots, k)$ konstant, $a_k \neq 0$, $x > 0$,
heißen Eulersche Differentialgleichungen k-ter Ordnung.

Lösungsansatz:
Der Ansatz $y(x) = x^r$ für die homogene Gleichung, d.h. $f(x) \equiv 0$, ergibt:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j r(r-1)\cdots(r-j+1) = 0.$$

Erhalte Gleichung, deren Lösung Nullstellen eines Polynoms in r vom Grad k sind.

Berechnung für den Fall $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' = 0.$

Berechnung für den Fall $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' = 0$.
- Substitution ergibt: $a_0 + a_1 r + a_2 r(r-1) = 0$, quadratisches Polynom.
- Differenzieren bestätigt: $y = x^r$ ist Lösung der homogenen Euler DGL, falls r Nullstelle des Polynoms.
- Sind $r_1 \neq r_2$ reelle Nullstellen des Polynoms, so sind $y_1 = x^{r_1}$ und $y_2 = x^{r_2}$ Lösungen der DGL.
- Sind $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen, so ist mit $r_1 = a + ib$ auch $r_2 = \bar{x}_1 = a - ib$ Nullstelle.
- Komplexe Lösung für $y = x^r$:

  $$x^{a+ib} = e^{\ln x^{a+ib}} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = x^a [\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$$

- Für komplexe Lösungen des Nullstellenproblems erhält man daher

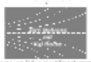
  $$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$$

  zwei Lösung der homogenen Eulerschen DGL.
- Allgemeine Lösung: wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung

  $$y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x).$$

4

Differentialgleichungen I



Lösung von DGLn durch Transformation
Systeme 1. Ordnung

Transformation

Eulersche DGL

Erinnerung: Trennung der Variablen Variation der Konstanten