DGL I

14.11.2017

J. Behrens

① Lösung für DGL-System 1. Ordnung:

Beobachtung:

1) Lösungen des lin. DGL-Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ bilden einen Vektorraum über dem Zahlenkörper der c_i

2) Da es sich um n lin. unabh. Lösungen handelt (Fundamental-system)

$\Rightarrow$ Vektorraum hat dim. n

Spezialfall: $n=1$ oder eine einzige DGL:

$\Rightarrow$ Lösung $y = C\,y_1 = C \cdot e^{-P(x)}$ ist allgemeine Lösung

Vektorraum hat dim. 1

Frage: Wie können wir ein Fundamentalsystem finden?

$\rightarrow$ lösbar, falls $A(x)$ nur konstante Elemente enthält.

falls $A(x) \neq$ konst., findet man Lösungen nur im Spezialfällen, oder zufällig, oder numerisch.

Ziel: Finde Lösung für $A(x)$ mit $a_{ij} \equiv$ konst.

Dazu: Sei $\vec{v}$ Eigenvektor (EV) zum Eigenwert λ (EW), dann

$$\vec{y}\,' = \lambda e^{\lambda x} \vec{v} = \lambda \vec{y} = A\vec{y}.$$

Also lässt sich mit EW λ und EV $\vec{v}$ eine Lösung von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ konstruieren.

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ findet man $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mit der Idee von oben $\vec{y}_1 = e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1$, $\vec{y}_2 = e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2$

Zeige: $[\vec{y}_1, \vec{y}_2]$ ist ein Fundamentalsystem $\rightarrow$ Wronski-Test

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & -e^{3x} \end{vmatrix} = -e^x e^{3x} - e^x e^{3x} = -2e^{4x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ bilden Fundamentalsystem.

$\Rightarrow$ $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist allgemeine Lösung.

(2) Entkopplung der Gleichungen:

Betrachte:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - 8y_2 - 12y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

Vereinbare: $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (*) lässt sich schreiben $\boxed{\vec{y}\,' = A\vec{y}}$

Eigenwerte: Charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$

Eigenvektoren: Man findet $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

lin. unabh.

EV-Matrix: Die Matrix $B = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$ ist regulär und es gilt

$$AB = BD \quad \text{wobei} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{denn } A\vec{v}_k = \lambda\vec{v}_k)$$

$$\Rightarrow B^{-1}AB = D$$

<u>Hilfsvektor</u>: Führe $\vec{z}$ ein, so dass $\vec{y} = B\vec{z}$

$$\Rightarrow \vec{y}' = AB z \quad \Rightarrow B^{-1}\vec{y}' = \vec{z}' = B^{-1}AB\vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{z}' = D\vec{z} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} z_1' &= 0 \\ z_2' &= z_2 \\ z_3' &= 2z_3 \end{aligned}\right\} \text{entkoppeltes DGL-System}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungen}: z_1 = c_1, \; z_2 = c_2 e^{x}, \; z_3 = c_3 e^{2x}$$

<u>Rücksubstitution</u>: Es gilt $\vec{y} = B\vec{z}$, also

$$\vec{y} = B\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^{x} \\ c_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 4 + c_2 4 e^{x} + c_3 2 e^{2x} \\ -c_1 - c_3 e^{2x} \\ -c_2 e^{x} \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung}} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Frage: was geschieht wenn algebr. Vielfachheit $\neq$ geom. Vielfachheit?

Betrachte: $\vec{y}' = A\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}$ (**)

Finde: $\lambda = 3$ doppelter EW von A

zu λ existieren EV der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ also

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin. abhängig. ☹

$\Rightarrow$ Defizit

Lösung: $\vec{y}_1 = e^{\lambda x} v_1 = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung

Fundamentalsystem: Benötige lin. unabh. zweite Lösung.

Existiert nicht in der Form $e^{\lambda x} \vec{v}$

Suche also etwas allgem. Form

$\vec{y}_2 = x \cdot e^{3x} \vec{w}$ ($\odot$) mit $\vec{w}$ konstant

Einsetzen in (**):

$$\Rightarrow \underbrace{3xe^{3x}\vec{w} + e^{3x}\vec{w}}_{\vec{y}'} - \underbrace{Axe^{3x}\omega}_{A\vec{y}}$$

$$= xe^{3x}(3\vec{\omega} - A\vec{\omega}) + e^{3x}\vec{\omega} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Dies gilt nur wenn $\vec{\omega} = \vec{0}$

<u>Weiterer Ansatz:</u> $\vec{y}_2 = e^{3x}\vec{v} + xe^{3x}\vec{w}$ (oo) mit $\vec{v},\vec{w}$ konst.

<u>Einsetzen:</u> $3xe^{3x}\vec{w} + e^{3x}(\vec{w}+3\vec{v}) = A(xe^{3x}\vec{w} + e^{3x}\vec{v})$

$\Rightarrow \quad \vec{0} = xe^{3x}(A-3E)\vec{w} + e^{3x}\left[(A-3E)\vec{v} + \vec{w}\right]$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow \quad (A-3E)\vec{w} = 0$ und $(A-3E)\vec{v} = \vec{w}$

Nun erfüllt $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die erste Gleichung

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die zweite Gl.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. unabh. Lösungen von $(A-3E)^2\vec{v} = 0$

$$\vec{y}_2 = e^{3x}\vec{v}_2 + xe^{3x}\vec{v}_1$$