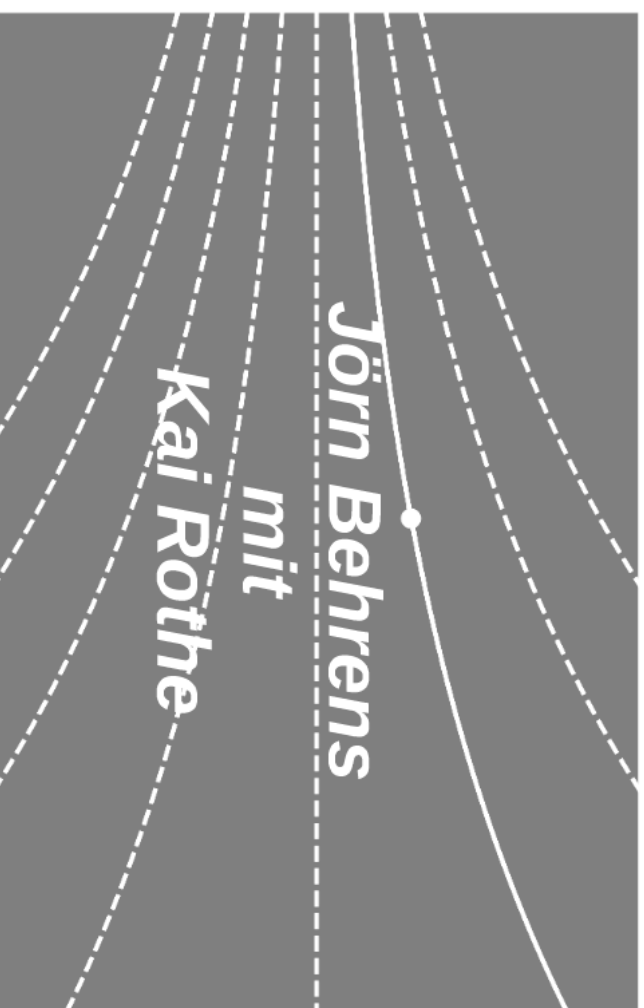


Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Lineare DGL Systeme – Matrix-Exponentiallösung

Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kapitel 6.7-6.8

Erinnerung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

Definition (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g, \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{j,i=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und y und g Systemvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $g \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Bezeichnungen

- Differentialgleichungen 1-ter Ordnung g lassen sich zu Systemen von n Gleichungen 1. Ordnung reduzieren
über: $y_1 = w, y_2 = f, \dots, y_n = w^n$, etc.
- Ist $n = 1$ so handelt es sich um ein lineares DGL.

Satz (Hauptvektordarstellung) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit α und v_1, \dots, v_α linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^{\alpha} v = 0.$$

Dann sind

$$y^k = e^{\lambda x} \sum_{j=1}^{\alpha-k} \binom{\alpha-k}{j} \lambda^j v_j, \quad (k = 1, \dots, \alpha)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.

Satz (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von g seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + g, \quad y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das inhomogene System

$$y' = A(x)y$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz (Wronski-Test)
Seien y_1, \dots, y_n Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ auf $]a, b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen y_1, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanter Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. λ der Eigenwert (EW) von A mit r zugehörigen Eigenvektoren (EV) v
Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems mitter Ordnung $y' = Ay$.

Hat das Matrix A kein r zugehöriger, vertretend (EV) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, mit r zugehörigen EV v_1, \dots, v_n , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearcombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$

sind sämtliche Lösungen der inhomogenen DGL-Systeme gegeben

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und \mathbf{y} und \mathbf{g} Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k -ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
Idee: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von \mathbf{g} seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Wronski-Test)

Seien y_1, \dots, y_n Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ auf $]a, b[$.

Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen y_1, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) \mathbf{v} .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Satz: (Hauptvektorlösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda_k x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Matrix-Exponentiallösung

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$y' = Ay.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$ -Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

1

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung $y(x) = e^{xA}y(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$y' = Ay.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$y' = Ay.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$ -Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!



Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung $y(x) = e^{xA}y(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$y' = Ay.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Wiederholung, Lösung, Fallstudie

1. Lösung des homogenen Systems

2. Bestimmung einer speziellen/partikulären Lösung

Satz 17.10: Voraussetzung für die Lösbarkeit ein System!

Es ist ein Resonanz

- Inhomogenes lineares System $y' = A(x)y + b$
- lineares rezonantes System $y' = A(x)y$
- Fundamentalsystem des zugehörigen Systems Y_1, \dots, Y_n
- Lösung des zugehörigen Systems $Y_1 = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$
- lineare Lösung des inhomogenen Systems Y_0

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$Y = Y_0 + c_1 Y_1 + \dots + c_n Y_n = Y_0 + Y_1$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- Y_1, \dots, Y_n , Fundamentalsystem auf $[a, b]$,
- Die Matrix $Y(x) = [Y_1 \dots Y_n]$,
- Inhomogenes System $y' = A(x)y + g$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$Y_p = Y(x) \cdot c(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $c(x) = \int c'(x) dx$ und $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot c'(x) = g.$$

3

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

Satz: (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)

Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$
- Homogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems: $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$
- Lösung des homogenen Systems: $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$
- Irgendeine Lösung des inhomogenen Systems: \mathbf{y}_p

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen System die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- Y_1, \dots, Y_n Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [Y_1 \dots Y_n]$,
- Inhomogenes System $y' = A(x)y + g$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$y_p = Y(x) \cdot c(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $c(x) = \int c'(x) dx$ und $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot c'(x) = g.$$

Lineare DGL n-ter Ordnung

Definition (Lineare DGL n-ter Ordnung)

Eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x),$$

mit $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$ definiert auf $[a, b]$.

Bemerkung (Lineare DGL n-ter Ordnung - System spezieller Ordnung)
Für die Funktionen

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, \dots, y_n = a_n$$

ist erhalten folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_{n-1}(x)y_1 - a_{n-2}(x)y_2 - \dots - a_0(x)y_n + g(x) \end{aligned}$$

Bemerkung (Lösbarkeit)

Betrachte den homogenen Fall $g(x) = 0$. Dann ist $y(x)$ Lösung der inhomogenen DGL

$$y'(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \\ -a_{n-1}(x)y_1(x) - a_{n-2}(x)y_2(x) - \dots - a_0(x)y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems $y' = A(x)y$ ist, falls Anfangswertbedingungen

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T = 0_{n \times 1}$$

für die Gleichung erster Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T = \mathbf{1}^T$$

die Anfangswertbedingungen des Systems

Satz (Existenz einer Lösung DGL n-ter Ordnung)

Seien Funktionen a_0, a_1, \dots, a_{n-1} und g stetig auf $[a, b]$.

1. Dann gibt es in $[a, b]$ die eindeutige Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung y der inhomogenen DGL lässt sich darstellen

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

mit geeigneten Konstanten c_1, \dots, c_n .

2. Die Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n lässt sich durch

$$y_i(x) = e^{\int a_{n-1}(x) dx} \int a_{n-2}(x) e^{-\int a_{n-1}(x) dx} dx \dots dx$$

3. Sei $A(x)$ die $n \times n$ Matrix des zugehörigen Systems

$$y' = A(x)y, \quad y(a) = y_0$$

4. Ist $A(x)$ auf $[a, b]$ invertierbar, so ist die Lösung des Systems $y' = A(x)y$ gegeben durch

$$y(x) = U(x)U^{-1}(a)y_0$$

offen für Lösungswörter in gewissen Hinsicht ist.

Definition (Wronskian) Die Wronskian einer n -tupel von Funktionen y_1, \dots, y_n ist

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die **Wronskian** Determinante dieser n Lösungen.

Bemerkung: Für ein System $y' = A(x)y$ gilt $W'(x) = -\text{tr}(A(x))W(x)$.

Definition: Fundamentalsystem einer linearen DGL n -ter Ordnung

- y_1, \dots, y_n auf $[a, b]$ definierte Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung;
- $y_1, \dots, y_n \in C^1$ Koefizienten, und
- es gilt: falls für alle $\alpha \in \mathbb{C}^n, \alpha \neq 0$ für die

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

gilt, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Dann heißt y_1, \dots, y_n **Fundamentalsystem** der homogenen DGL n -ter Ordnung

Definition: (Lineare DGL n -ter Ordnung)

Eine **linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung** ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x),$$

mit $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$ definiert auf $]a, b[$.

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n - 1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

Bemerkung: (Lineare DGL n -ter Ordnung – System erster Ordnung)
Führe die Funktionen

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

\vdots

$$y_{n-1}' = y_n$$

$$y_n' = -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \dots - a_{n-1}(x)y_n + g(x).$$

Bemerkung: Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

entspricht die lineare DGL n -ter Ordnung also dem System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Bemerkung: (Lösbarkeit)

Betrachte den homogenen Fall: $g(x) = 0$. Dann ist $y(x)$ Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung, wenn

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems $\mathbf{y} = A(x)\mathbf{y}$ ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

für die Gleichung n -ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$\mathbf{y}(\xi) = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})^T$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

Definition: (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ definierte Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle $x \in]a, b[$ für die

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

gilt, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Dann heißt y_1, \dots, y_n **Fundamentalsystem** der homogenen DGL n -ter Ordnung.

Bemerkung: Differentiation (für $k = 1, 2, \dots, n - 1$) der Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Definition: (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ beliebige Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung. Dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** dieser n Lösungen.

Bemerkung: Man kann beweisen:

$$W(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[\Leftrightarrow \exists x_0 \in]a, b[: W(x_0) \neq 0.$$

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n - 1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

Ist y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n -ter Ordnung erfasst.

4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Definition: (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Definition

Lineare DGL n-ter Ordnung

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$
 Lösungsmethode:
 1. Bestimmung der charakteristischen Gleichung:
 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$
 2. Bestimmung der Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
 3. Bestimmung der Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n
 4. Bestimmung der Partikulärlösung y_p
 5. Bestimmung der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$

Erläuterung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

$y' = A(x)y + b(x)$
 Lösungsmethode:
 1. Bestimmung der Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n
 2. Bestimmung der Partikulärlösung y_p
 3. Bestimmung der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$

Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

$y' = A(x)y + b(x)$
 Lösungsmethode:
 1. Bestimmung der Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n
 2. Bestimmung der Partikulärlösung y_p
 3. Bestimmung der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$

Matrix-Exponentiallösung

Lösungsmethode:
 1. Bestimmung der Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n
 2. Bestimmung der Partikulärlösung y_p
 3. Bestimmung der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$