DGL I

19.12.2017

J. Behrens

① <u>Beispiel</u>:

- Betrachte: $y'' + y = \cos(2x)$ mit $y(0)=0$, $y'(0)=1$

- Ansatz: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

- Anfangswerte: $y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

  $y'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

- Ableitungen: $y'(x) = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$

  $y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$

- Rechte Seite: $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + - \dots$

- Einsetzen in DGL:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

$$x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{16}{4!} x^4 - \frac{64}{6!} x^6 + - \dots$$

- Koeffizientenvergleich : $2a_2 = 1$, $6a_3 + 1 = 0$

$$12a_4 + a_2 = -\frac{4}{2!}, \quad 20a_5 + a_3 = 0 \quad \ldots$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = -\frac{5}{24}, \quad a_5 = \frac{1}{120}$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

- Für $y(x)$:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

- Allgemein: (aus Koeffizientenvergleich)

$$x^{2j} : \quad a_{2j} + (2j+1)(2j+2)\,a_{2j+2} = (-1)^j \frac{2^{2j}}{(2j)!}$$

$$x^{2j+1} : \quad a_{2j+1} + (2j+2)(2j+3)\,a_{2j+3} = 0$$

- Für ungerade Indizes

$$a_{2j+3} = -\frac{a_{2j+1}}{(2j+2)(2j+3)} \qquad \text{mit } a_1 = 1$$

$$\Rightarrow a_{2j+3} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+3)!} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

- Potenzreihe für $\sin x$:

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \sin x$$

- Also : $y(x) = \sin x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + - \ldots\right)$

- Analoges Vorgehen: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \dots = \frac{1}{3}(\cos x - \cos(2x))$
- Lösung insgesamt:

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{2}(\cos x - \cos(2x))$$

② Beispiel (Taylor-Reihe):

- Betrachte: $y' = x + y^2 \quad , \quad y(0) = 1$
- Ansatz: Taylor-Polynom 4. Grades (Näherung an y)

$\longrightarrow$ $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{(4)}(0)$ sukzessive berechnen.

- Differenzieren:

$$\begin{aligned} y'' &= 1 + 2yy' \\ y''' &= 2y'y' + 2yy'' \\ y^{(4)} &= 2y''y' + 2y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' \\ &= 6y''y' + 2y'''y \end{aligned}$$

- AWP:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 3 \\ y'''(0) &= 8 \\ y^{(4)}(0) &= 18 + 16 = 34 \end{aligned}$$

- Taylorpolynom: $y(x) \approx T_4(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{34}{24}x^4$

in Umgebung von $x = 0$