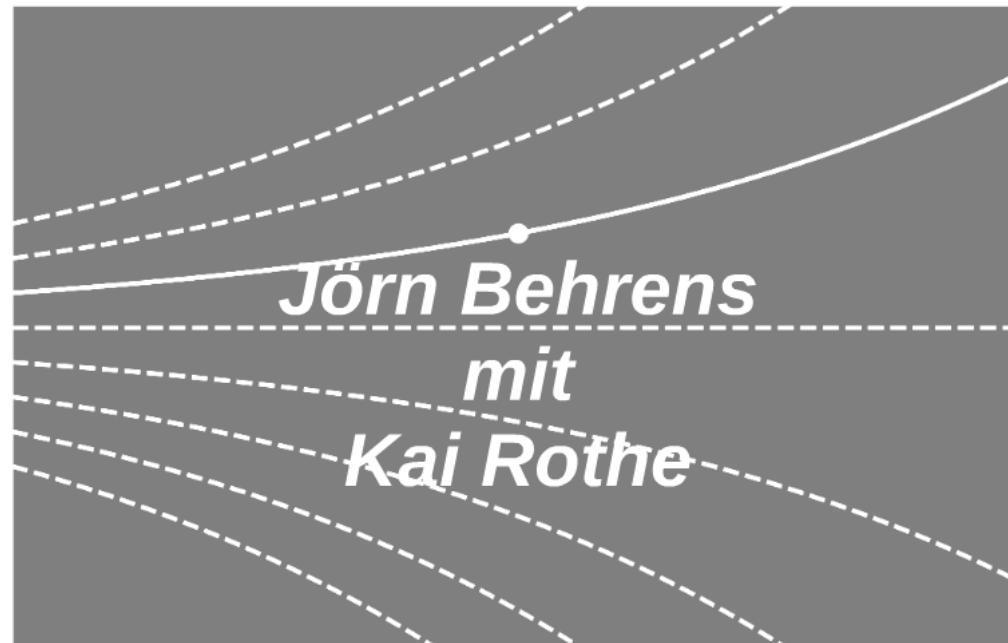


Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Lösung mittels Potenzreihen

Buch Kapitel 6.11-6.12

Erinnerung Laplace-Transformation

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r .

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional,}$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.

Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow Y(z) &= (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)^{-1}R(z) =: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(z)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t - \tau)r(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt **Greensche Funktion**.

Laplace-Transformation

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r .

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional,}$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.

Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow Y(z) &= (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)^{-1}R(z) =: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(z)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t - \tau)r(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt **Greensche Funktion**.

Motivation

Idee:

1. Welche weitere Umformung können wir nutzen, um eine DGL zu lösen?
2. Wir erinnern uns an die Potenzreihen (Vereinfachung für \sin , \cos , \exp !).
3. Ableitungen sind einfach zu berechnen (komponentenweise).

1

Idee:

1. Welche weitere Umformung können wir nutzen, um eine DGL zu lösen?
2. Wir erinnern uns an die Potenzreihen (Vereinfachung für \sin , \cos , \exp !).
3. Ableitungen sind einfach zu berechnen (komponentenweise).



Potenzreihen-Ansatz

Zusammenfassung:

Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit } y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für \cos .
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y .

Bemerkungen:

- Falls Anfangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.
- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der "einfachen" Differenzierbarkeit!

Zusammenfassung:

Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit } y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für \cos .
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y .

Bemerkungen:

6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y .

Bemerkungen:

- Falls Anfangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.
- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der “einfachen” Differenzierbarkeit!

Taylor-Reihe

Idee:

Sei das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben. Verwende das Taylorpolynom

$$T_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1. Dann erhalte $y(x_0) = y_0$.
2. Weiter berechne $y'(x_0)$ aus der Formel als $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
3. Erhalte y'' durch differenzieren: $y'' = \frac{df}{dx}(x, y)$.
Um also $y''(x_0)$ zu berechnen:

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(x_0).$$

4. Fahre sukzessive fort.

Bemerkung: Eine Abschätzung der Genauigkeit ist nicht möglich, da eine allgemeine Formel für $y^{(n)}(x_0)$ nicht bekannt ist.

2

Idee:

Sei das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben. Verwende das Taylorpolynom

$$T_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1. Dann erhalte $y(x_0) = y_0$.
2. Weiter berechne $y'(x_0)$ aus der Formel als $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
3. Erhalte y'' durch differenzieren: $y'' = \frac{df}{dx}(x, y)$.
Um also $y''(x_0)$ zu berechnen:

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(x_0).$$

4. Fahre sukzessive fort.

Bemerkung: Eine Abschätzung der Genauigkeit ist nicht möglich, da eine allgemeine Formel für $y^{(n)}(x_0)$ nicht bekannt ist.

Besselsche Differentialgleichung

Betrachte: Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad 0 \leq n \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Diese gewöhnliche DGL entsteht durch Darstellung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten.

Ansatz:

Verwende den allgemeinen Potenzreihen-Ansatz

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$.

Koeffizientenvergleich:

Einsetzen in die DGL und Vergleich der Koeffizienten der Potenzen x^r, x^{r-1}, x^{r+k} ($k = 2, 3, \dots$) führt auf die Beziehungen:

$$\begin{aligned}(r^2 - n^2)a_0 &= 0 \\ ((r+1)^2 - n^2)a_1 &= 0 \\ (k+r+n)(k+r-n)a_k + a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ muss $r = n$ oder $r = -n$ sein (a_0 dann beliebig wählbar!).

Differentialgleichung

Betrachte: Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad 0 \leq n \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Diese gewöhnliche DGL entsteht durch Darstellung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten.

Ansatz:

Ansatz:

Verwende den allgemeinen Potenzreihen-Ansatz

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$.

Koeffizientenvergleich:

Einsetzen in die DGL und Vergleich der Koeffizienten der Potenzen x^r , x^{r-1} , x^{r+k} ($k = 2, 3, \dots$) führt auf die Beziehungen:

$$(r^2 - n^2)a_0 = 0$$

$$((r + 1)^2 - n^2)a_1 = 0$$

$$(k + r + n)(k + r - n)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Wegen $a_0 \neq 0$ muss $r = n$ oder $r = -n$ sein (a_0 dann beliebig wählbar!).

r = n

Rekursionsformel

- Aus $a_0 \neq 0$ und $r = n$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

- Wegen $a_1 = 0$ verschwinden alle a_k mit ungeradem Index: $a_{2k-1} = 0$.
- Konkret erhält man

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(n+1)},$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2^4 2(n+1)(n+2)}, \dots$$

$$\text{allgemein } a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2) \dots (n+k)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Formale Lösung: Wir erhalten die formale Lösung

$$y(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{1}{1!(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{1}{k!(n+1) \dots (n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \dots \right]$$

Die Reihe in eckigen Klammern ist **beständig konvergent** (für alle $x \in \mathbb{R}$).

Verwendung der Gamma-Funktion: Verwende die Eigenschaften der Gamma-Funktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x > 0$) und $\Gamma(k+1) = k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Dann gilt

$$\frac{1}{k!(n+1) \dots (n+k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

Also

$$y(x) = a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1) \dots (n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ = a_0 2^n \Gamma(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Bessel-Funktion n -ter Ordnung erster Gattung:

Wähle nun $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$. Dann gilt

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

ist Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Rekursionsformel:

- Aus $a_0 \neq 0$ und $r = n$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_0 = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

- Wegen $a_1 = 0$ verschwinden alle a_k mit ungeradem Index: $a_{2k-1} = 0$.
- Konkret erhält man

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(n+1)},$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(n+1)(n+2)}, \dots$$

$$\text{allgemein } a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \cdots (n+k)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Formale Lösung: Wir erhalten die formale Lösung

$$y(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{1}{1!(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{1}{k!(n+1) \cdots (n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \dots \right]$$

Die Reihe in eckigen Klammern ist beständig konvergent (für alle $x \in \mathbb{R}$).

Nachweis Beständige Konvergenz: Setze

$$u = \left(\frac{x}{2}\right)^2, \text{ und}$$

$$b_k = (-1)^k \frac{1}{k!(n+1) \cdots (n+k)}.$$

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ gilt dann

$$\frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = (k+1)(n+k+1), \quad \text{also} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = \infty.$$

Nach Satz (2. Semester) ist die Reihe dann für alle $u \in \mathbb{R}$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

$$\overline{\dots(n+k)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Verwendung der Gamma-Funktion: Verwende die Eigenschaften der Gamma-Funktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x > 0$) und $\Gamma(k+1) = k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Dann gilt

$$\frac{1}{k!(n+1)\dots(n+k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

Also

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1)\dots(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= a_0 2^n \Gamma(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned}$$

Bessel-Funktion n -ter Ordnung erster Gattung:

Wähle nun $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ Dann gilt

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

ist Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

r = -n

Rekursionsformel:

- Mit $r = -n$ suchen wir also Lösung der Form

$$y(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- Aus $a_0 \neq 0$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2n)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

(Voraussetzung: $n \neq 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$).

Formale Lösung: Analog zum Vorgehen für $r = n$ erhält man

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-k}$$

- Die Formel gilt für $n \neq 0, 1, 2, \dots$
- $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen DGL, also Fundamentalsystem.
- Für $n \geq 0, n \neq 0, 1, 2, \dots$ ist die allgemeine Lösung der Besselschen DGL angeben:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$
- Für Lösungen die für $x \rightarrow 0$ beschränkt bleiben, muss $c_2 = 0$ sein, da $J_{-n}(x) \sim x^{-n}$.

Bessel-Funktion erster Ordnung zweiter Gattung:

- Frage: Lösung für $n=0, 1, 2, \dots$?
- Antwort: keine \rightarrow $Y_n(x)$!
- Beweis: für $0 \leq k \leq n-1$ ist $\Gamma(n-k+1) = 0$. Somit kann der Nenner nicht Null sein!
- Frage:

$$Y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-k+1} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Fundamentalsystem: Da $J_n(x)$ + diese Formel die allg. Lösung ist, muss $Y_n(x)$ eine Fundamentalsystem bilden werden (**Bessel-Funktion zweiter Gattung**, die **Neumann-Funktion**).

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

- Man kann zeigen, dass $Y_n(x) \sim \ln(x)$ für $x \rightarrow 0$.

Allgemeine Lösung der Besselschen DGL:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ist allgemeine Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Dabei sind

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

Rekursionsformel:

- Mit $r = -n$ suchen wir also Lösung der Form

$$y(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- Aus $a_0 \neq 0$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2n)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

(Voraussetzung: $n \neq 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$).

Formale Lösung: Analog zum Vorgehen für $r = n$ erhält man

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

- Die Formel gilt für $n \neq 0, 1, 2, \dots$
- $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen DGL also Fundamentalsystem.
- Für $n \geq 0$, $n \neq 0, 1, 2, \dots$ ist die allgemeine Lösung der Besselschen DGL gegeben:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- Für Lösungen die für $x \rightarrow 0$ beschränkt bleiben, muss $c_2 = 0$ sein, da $J_{-n}(x) = \mathcal{O}(x^{-n})$.

Bessel-Funktion n -ter Ordnung zweiter Gattung:

- **Frage:** Lösung für $n = 0, 1, 2, \dots$?
- **Ansatz:** Setze $-n$ in $J_n(x)$ ein.
- **Beachte:** für $0 \leq k \leq n - 1$ ist $\Gamma(-n + k + 1) = \infty$. Setze dann den Koeffizienten zu Null!
- **Erhalte:**

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

- **Fundamentalsystem:** Da $J_{-n}(x)$ in diesen Fällen lin. abhängig ist, muss $J_n(x)$ zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden (**Bessel-Funktion zweiter Gattung**, oder Weber-Funktion, oder Neumann-Funktion):

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

- Man kann zeigen, \lim existiert und $J_n(x), Y_n(x)$ bilden Fundamentalsystem.

Allgemeine Lösung der Besselschen DGL:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ist allgemeine Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Dabei sind

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

