DGL I

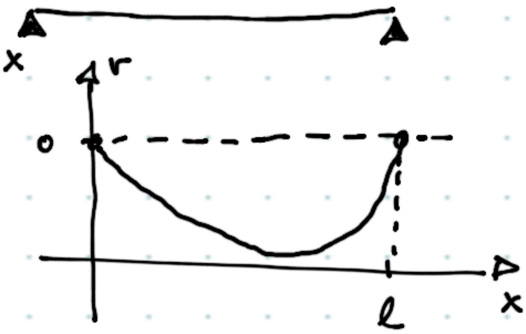
09.01.2018

J. Behrens

① Beispiel

- Durchbiegung eines an 2 Punkten aufliegenden Trägers
- Gleichung : $y'' = \underbrace{-C\left(1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right)x}_{r(x)}$

  $C \neq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell$



- Randbedingungen : $y(0) = y(\ell) = 0$
- Allgemeine Lösung : $y(x) = -C\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20\ell^2}\right) + c_1 x + c_2$

  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Auswertung der Randbedingungen :

  $$0 = y(0) = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

  $$0 = y(\ell) = -C\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{20}\right) + c_1 \ell \quad \Rightarrow \quad c_1 = C\frac{7}{60}\ell^2$$

- Damit: $y(x) = C\left[\frac{7\ell^2}{60}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20\ell^2}\right]$ ist Lösung des Randwertproblems

- Variation der Randbedingungen :

a) $y'(0) = 0 \quad , \quad y(l) = 0$

$$y'(x) = -C\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4l^2}\right) + C_1$$

$$\Longrightarrow y(x) = C\left[\frac{7l^3}{60}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20l^2}\right]$$

b) $y'(0) = y'(l) = 0$

$$0 = y'(0) = C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$0 = y'(l) = -C\frac{l^2}{4} \quad \lightning$$

dh. $\nexists$ Konstanten c_1, c_2, so dass die DGL die Randbedingungen erfüllt!

② Beispiel

- Betrachte: $y'' = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$

- Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 + \frac{1}{4} e^{2x}$

$$= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

- Dabei ist:

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) \equiv 1$$

$$\alpha_K = 1, \quad \beta_K = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad R_1(y_1) = y_1(0) = 0 \qquad r_1 = 1 - y_r(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{3}$$

$$R_1(y_2) = y_2(0) = 1 \qquad r_2 = 3 - y_r(1) = 3 - \frac{1}{4} e^2$$

$$R_2(y_1) = y_1(1) = 1$$

$$R_2(y_2) = y_2(1) = 1$$

- Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 3 - \frac{1}{4} e^2 \end{pmatrix}$

- Lösung: $c_2 = \frac{1}{4}(9 - e^2)$, $c_1 \left(\frac{3}{4}\right)$

- Das ergibt die Lösung der DGL:

$$y(x) = \frac{1}{4}(9 - e^2)x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

③ Selbstadjungierte DGL:

- Frage: Sei $D[y] = r(x)$ gegeben.

  Gibt es eine äquivalente DGL mit selbstadjungiertem Differentialausdruck?

- Beobachtung: Multiplikation mit $e^{s(x)}$ ($s(x)$ beliebig, diff'bare Fkt.) ändert die Lösungsmenge nicht.

- Also: $D[y] = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r(x)$

$$\Rightarrow e^{s(x)}(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) = e^{s(x)} r(x)$$

$$\Rightarrow (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)}(a_1 - a_0' - s' a_0) y' + e^{s(x)} a_2 y = e^{s(x)} r(x)$$

- Idee: Wählen s so, dass $(a_1 - a_0' - s' a_0)$ verschwindet

$$\Rightarrow L[y] := (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)} a_2 y = e^{s(x)} r(x) =: z(x)$$

  ist zu $D[y] = r(x)$ äquivalent und selbstadjungiert.

- Setze: $p(x) = e^{s(x)} a_0(x)$, $q(x) = e^{s(x)} a_2(x)$

$$\Rightarrow L[y] = (p(x) y')' + q(x) y$$

Es gilt: $p(x) \neq 0$ da $a_0(x) \neq 0$, o.B.d.A. annehmen: $p(x) > 0$

- Es bleibt: Finde s, so dass $(a_1 - a_0' - s' a_0) = 0$;

  Wähle $s' = \frac{a_1 - a_0'}{a_0}$ bzw. $s(x) = \int \frac{a_1 - a_0'}{a_0} \, dx$

- <u>Fazit</u>: Mit der Wahl von $s(x)$ ist es immer möglich,

  eine zu $D[y] = r(x)$ äquivalente DGL

  $$L[y] = z(x)$$

  zu finden mit $L[y]$ selbstadjungierter Differentialausdruck