

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzübung

Aufgabe 1:

Die Lage eines Schwingers, zum Beispiel eines an einer Feder befestigten Zylinders/Kolbens, der sich in einer zähen Flüssigkeit bewegt, soll durch eine mathematische Gleichung beschrieben werden. Wir bezeichnen mit $x(t)$ die Auslenkung des Schwingers aus der Ruhelage. In einem einfachen Modell wird angenommen, dass nur

- eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft $F = -D \cdot x(t)$, $D \geq 0$ und
- eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft $\tilde{F} = -\mu \cdot \dot{x}(t)$, $\mu \geq 0$

auf den Kolben wirken.

Nach dem Newtonschen Gesetz der Mechanik gilt:

$$\text{Masse (m)} \cdot \text{Beschleunigung } (\ddot{x}(t)) = \sum \text{ aller einwirkenden Kräfte.}$$

- a) Durch welche Differentialgleichung wird diese gedämpfte Schwingung beschrieben?
- b) Wie lautet die Differentialgleichung aus a) im ungedämpften Fall $\mu = 0$ eines Kolbens mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$ wenn $D = 200 \text{ N/m}$ gilt?
 - (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ mit beliebigen reellen Zahlen c_1 und c_2 diese Differentialgleichung lösen.
 - (ii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ vorgibt?
Können Sie die Position des Zylinders zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (zum Beispiel $t = 10$) angeben?
 - (iii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man zusätzlich die Anfangsauslenkung $x(0) = 0.5 \text{ m}$ vorgibt?

Aufgabe 2:

Gesucht seien Lösungen der Differentialgleichung

$$200 \cdot \ddot{x}(t) = -40 \cdot \dot{x}(t) - 202 \cdot x(t).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = ke^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ konstant, mehrere Lösungen dieser Differentialgleichung.

Bearbeitungstermine: 29.10.- 02.11.2018