Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzübung

Aufgabe 1: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = e^{2t} \cdot \sin(t)\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und geben Sie eine Fundamentalmatrix für dieses System an.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Verwenden Sie die Methode der Variation der Konstanten für das zugehörige System.

Hinweis: $\displaystyle\int e^{\alpha t} \cdot \sin(t)\, dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + 1}\,(\alpha \cdot \sin(t) - \cos(t)) + C\,.$

Aufgabe 2: Zur Verkürzung der Schreibweise verwenden wir das Doetsch-Symbol:

$$F(s) := L\,[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \iff f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$$

Folgende Korrespondenzen bzw. Zusammenhänge für $\mathrm{Re}\,(s) > r$, die entweder in der Vorlesung bewiesen wurden oder völlig analog zum Vorgehen in der Vorlesung bewiesen werden können, dürfen benutzt werden.

f	F	r
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\,(a)$
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0

Dabei ist $\qquad h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a, \\ 0 & t < a. \end{cases}$

Falls $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$, dann gilt:

$I)$	$h_a(t)f(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa}F(s)$	Verschiebung im Originalraum Mult. mit exp-Fkt im Bildraum
$II)$	$e^{at}f(t)$, $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im Originalraum
$III)$	$(-t)^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^{(n)}(s)$	Ableitungen im Bildraum Mult. mit t^n im O–Raum

a) Bestimmen Sie die Laplace Transformierten der folgenden Originalfunktionen:

(i) $f(t) := 5e^{-2t}$,

(ii) $g(t) := t^2 \sin(3t)$,

(iii) $h(t) := \sinh(t)\cos(\alpha t)$,

(iv)
$$k(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 3t-1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Bildfunktionen der Laplace Transformation

(i) $G(s) := \dfrac{s+1}{(s^2+2s+10)^2}$,

(ii) $F(s) := \dfrac{5s^2-13s+21}{(s-2)(s^2-2s+5)}$.

Bearbeitungstermine: 07.01.-11.01.2019