Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2018/2019

Allgemeine Informationen

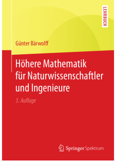
Informationsquellen

- https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d1/1819/
- http://webcast.tu-harburg.de/Mediasite/Play/f037c78d25a949c984620c550d8089811d
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab 29.10.2018)
  Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab 22.10.2018)
  Montag, 12:30–14:00 Uhr, Audimax I
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 13:30–14:30

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Differentialgleichungen I

1. Einführung und elementare Methoden
2. Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben
3. Lineare Differentialgleichungen
4. Laplace-Transformation
5. Stabilität und qualitatives Lösungsverhalten
6. (Randwertaufgaben und Grundbegriffe der Variationsrechnung)
7. (Eigenwertaufgaben)
8. (Numerische Verfahren zur Integration von Anfangs- und Randwertaufgaben)

Einführung und elementare Methoden

Differentialgleichungen

Buch Kap. 6.1

Anwendung von Differentialgleichungen auf technische Fragestellungen

a) Mathematische Modellierung eines (technischen) Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung
b) Formulierung (physikalisch) sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen
c) Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- bzw. Randbedingungen
d) Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung

Allgemeine Begriffe

Notation: Ableitung

Sei I ein Intervall, $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \qquad \text{erste Ableitung}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) \qquad \text{zweite Ableitung}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) := \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) \qquad n\text{-te Ableitung}$$

Wir setzen zudem

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) := \mathbf{x}(t).$$

Allgemeine Begriffe

Definition 6.1: (gewöhnliche Differentialgleichung)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine Funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ist eine Gleichung zwischen t, $\mathbf{x}$ und den Ableitungen von x bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)) = 0 \qquad \text{(implizite Form)}.$$

Liegt diese Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von $\mathbf{x}$ vor, so spricht man von der expliziten Form:

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)) \qquad \text{(explizite Form)}.$$

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Richtungsfelder

Buch Kap. 6.3

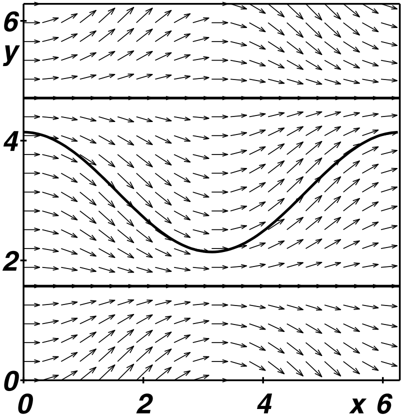


Abbildung 6.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sin(t)\cos(\mathbf{x}(t))$

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Seien $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $I \subset$ ein Intervall und sei

$$f : I \times U_0 \times \cdots U_{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

eine Funktion.
Eine n-mal differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)), \tag{1}$$

wenn $J \subset I$ ein Intervall ist, für alle $t \in J$ gilt

$$\mathbf{x}(t) \in U_0, \; ..., \; \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \in U_{n-1},$$

und (1) gilt für alle $t \in J$.

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Lösung eines Anfangswertproblems

Seien $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $I \subset$ ein Intervall, sei $t_0 \in I$, sei

$$f : I \times U_0 \times \cdots U_{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

eine Funktion, und seien $\mathbf{x}_0 \in U_0$,..., $\mathbf{x}_{n-1} \in U_{n-1}$.
Eine n-mal differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung des Angangswertproblems

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)}(t) &= f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn $J \subset I$ ein Intervall mit $J \subset I$, für alle $t \in J$ gilt

$$\mathbf{x}(t) \in U_0,\ ...,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \in U_{n-1},$$

und (2) gilt für alle $t \in J$.

Transformation auf erste Ordnung

Buch Kap. 6.2

Differentialgleichung erster Ordnung

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)}(t) &= f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

und setze

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t) \\ \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \\ \mathbf{x}^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2(t) \\ \mathbf{y}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ f(t, \mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t), ..., \mathbf{y}_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Transformation auf erste Ordnung

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Definition (Lipschitz-Bedingung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$, wobei

- $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

Dann sagt man, *f erfüllt die Lipschitz-Bedingung*, wenn für jedes $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_f$, eine offene Menge $U_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \subset D_f$ mit $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$ existiert, so dass

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

für alle $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$.

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Definition (Lipschitz-Bedingung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$, wobei

- $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

Dann sagt man, *f erfüllt die Lipschitz-Bedingung*, wenn für jedes $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_f$, eine offene Menge $U_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \subset D_f$ mit $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$ existiert, so dass

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

für alle $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$.

Satz

Wenn die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$ stetig partiell differenzierbar ist, dann erfüllt sie die Lipschitz-Bedingung.

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Satz 6.1

Das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

mit $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D_f := U \times I$ besitzt mindestens eine Lösung, falls $f(\cdot, \cdot)$ auf D_f stetig ist.
Erfüllt die Funktion die LIPSCHITZ–Bedingung, dann ist die Lösung eindeutig.

Existenz- und Eindeutigkeit

Beispiele

Existenz- und Eindeutigkeit

Beispiele

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))}$$

mit

- $g : I \to \mathbb{R}$,
- $h : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Was gehört dazu, was nicht?

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Lösung einer Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

1) Schreibe die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))}$ in der Form $h(x)(t))\,\dot{x}(t) = g(t)$ bzw. $h(x)\,dx = g(t)\,dt$.
2) Integriere die linke Seite bezüglich x und die rechte Seite bezüglich t.
3) Falls möglich, löse die dadurch entstehende Gleichung

$$H(x) = G(t) + C$$

nach x auf. Ansonsten ist die Lösung $x(t)$ in impliziter Form gegeben.

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Beispiele

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Beispiele

DGLen mit trennbaren Variablen

Beispiele

DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 1 Buch Kap. 6.4

Betrachte für $x > 0$ bzw. $x < 0$

$$\dot{x}(t) = t\,x\,,$$

Schreibe

$$\frac{dx}{x} = t\,dt$$

und integriere die linke Seite bezüglich x, die rechte bezüglich t und erhalten

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C_0\,, \quad \text{also} \quad |x| = e^{\frac{t^2}{2}+C_0} = e^{C_0}\,e^{\frac{t^2}{2}}\,.$$

Damit folgt $x(t) = \pm e^{C_0}\,e^{\frac{t^2}{2}} = Ce^{\frac{t^2}{2}}$ $(C \neq 0)$. Für $C = 0$ ergibt sich die zunächst ausgeschlossene Lösung $x \equiv 0$.

DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 2

Buch Kap. 6.4

Betrachte

$$\dot{x}(t) = \sin t \cos x,$$

deren Richtungsfeld wir in Abb. 6.1 dargestellt haben.
Um die Gleichung durch $\cos x$ dividieren zu können, müssen wir $\cos x \neq 0$ bzw. $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, fordern. Diese Forderung bedeutet, dass wir die konstanten Lösungen $x(t) \equiv (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, der Differentialgleichung nicht mit der Methode der Trennung der Veränderlichen bestimmen können, was ja auch nicht nötig ist.
Es ergibt sich

$$\frac{\dot{x}}{\cos x} = \sin t \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin t \; dt\ .$$

Integration ergibt $\ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos t + C_0$ und damit

$$x(t) = 2\arctan(Ce^{-\cos t}) - \frac{\pi}{2} \qquad (C \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

DGLen mit trennbaren Variablen, chemische Reaktion

Chemische Reaktion erster Ordnung (Sättigungskonzentration c_0 und Reaktionskonstante $k > 0$):

$$\dot{x}(t) = k(c_0 - x(t)).$$

Mit $g(t) = k = \mathrm{const}$ und $h(x) = \frac{1}{c_0 - x}$ ergibt sich

$$\frac{dx}{c_0 - x} = k\,dt\ .$$

Nach Integration

$$\int \frac{dx}{c_0 - x} = k \int dt\ +\ C\ , \quad \text{also} \quad -\ln|c_0 - x| = k\,t + C\ .$$

Auflösung nach x ergibt

$$|c_0 - x| = e^{-k\,t - C} = e^{-C}\,e^{-k\,t} \quad \text{bzw.} \quad c_0 - x = \pm e^{-C}\,e^{-k\,t} = C_1\,e^{-k\,t}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_0 - C_1\,e^{-k\,t}\ .$$

DGLen mit trennbaren Variablen

Abbildung Chemische Reaktion erster Ordnung

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Beispiel: $\dot{x}(t) = tx(t)^2$

Beispiele von DGLen erster Ordnung

Buch Kap. 6.3

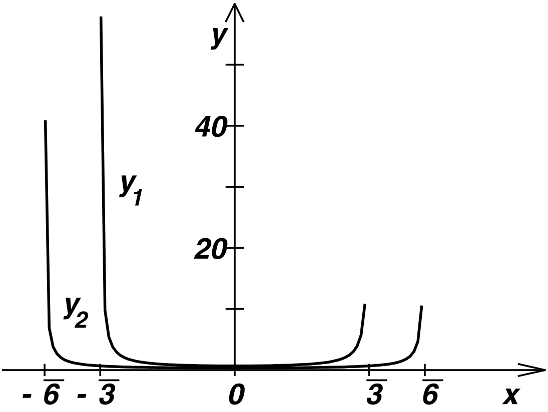


Abbildung 6.3: $\dot{x}(t) = tx(t)^2$ hat Lösungsschar $x(t) = \frac{1}{C - t^2/2}$ mit $C = \frac{1}{x_0} + \frac{t_0^2}{2}$, falls (t_0, x_0) den Anfangswert bezeichnet. Dargestellt sind die Lösungen x_1 und x_2 der Differentialgleichung für $(t_0, x_0) = (1{,}1)$, d.h. $C = 1{,}5$, und $(t_0, x_0) = (2{,}1)$, d.h. $C = 3$.

Lineare Differentialgleichungen

Lineare DGLen

Buch Kap. 6.5

Lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)\ , \tag{5}$$

heißt lineare Differentialgleichung (in Normalform).
Die Differentialgleichung (5) heißt homogen linear, falls $q(\cdot) = 0$, anderenfalls inhomogen linear.

$$|x(t)| = e^{C_0} e^{-P(t)} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = C\, e^{-P(t)} \ \ (C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wobei $P(t)$ Stammfunktion von $p(t)$ ist, d.h. $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$. Für $C = 0$ folgt $x(t) \equiv 0$.

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Ansatz für Lösung homogener Gleichung

$$x(t) = C(t)e^{-P(t)}.$$

Einsetzen in $\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$ ergibt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} - C(t)p(t)e^{-P(t)} + p(t)C(t)e^{-P(t)} = q(t)\,.$$

Daraus folgt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} = q(t) \Longrightarrow \dot{C}(t) = q(t)e^{P(t)} \Longrightarrow C(t) = \int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{P(\tau)}\,d\tau + C_1$$

mit einer beliebige Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Damit gilt

$$x(t) = C_1 e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} q(\tau) e^{P(\tau)}\, d\tau =: x_{hom}(t) + x_{inh}(t)\,.$$

$x(t) = x_{hom}(t) + x_{inh}(t)$ erfüllt für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Gleichung.

Beispiele

Beispiele

Beispiele

Lineare DGLen, Ansätze für $p \equiv$ const.

Für

$$\dot{x}(t) + px(t) = q(t)$$

liefern die folgenden Ansätze partikuläre Lösungen:

Inhomogenität q	Ansatz für x_{inh}
$\sum_{k=1}^{m} a_k t^k$	$\sum_{k=1}^{m} A_k t^k$
$a_1 e^{at}$	$A_1 e^{at}$ für $a \neq -p$
$a_1 e^{at}$	$tA_1 e^{at}$ für $a = -p$
$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$	$A \sin(\omega t - B)$

Summen und Produkte der genannten Inhomogenitäten bedingen entsprechende Ansätze für x_{inh}.

Beispiele

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

Lineare DGL Systeme erster Ordnung

Satz 6.2

Die Elemente der Matrix $A(t)$, also die Funktionen $a_{ij}(t)$ und die Komponenten von $\mathbf{g}(t)$ seien stetig im Intervall $[a, b]$.
Dann hat das System $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ mindestens eine Lösung.
Sei $t_0 \in [a, b]$ und $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ ,$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.3

Sind die Elemente der Matrix $A(t)$, also die Funktionen $a_{ij}(t)$, in $[a, b]$ stetig, dann besitzt das homogene System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

auf $[a, b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Definition

Ein solches System $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ von linear unabhängigen Lösungen heißt *Fundamentalsystem* und jedes $\mathbf{x}_i$ *Fundamentallösung*.

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Beispiel

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Definition 6.2

Bezeichnen $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ Lösungen des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

und bezeichne $X(t)$ die Matrix mit Spalten $\mathbf{x}_i(t), i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$W(t) := \det \; X(t)$$

WRONSKI–**Determinante**.

Überlegungen zur Wronski-Determinanten Buch Kap. 6.7

Wronski-Determinante

Überlegungen zur Wronski-Determinanten Buch Kap. 6.7

Wronski-Determinante

Wronski Test

Buch Kap. 6.7

Satz 6.4

Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n$ Lösungen von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

auf dem Intervall $[a, b]$. Sind die Elemente von $A(t)$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt

a) $W(t) \equiv 0$ oder $W(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

b) Die Lösungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(t) \neq 0$ ist.

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.5

Durch $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n$ sei auf $[a, b]$ ein Fundamentalsystem von $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$ gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{x}$ auf $[a, b]$ in der Form

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

darstellen, wobei $c_1, c_2, \dots, c_n$ Konstanten sind, die reell oder komplex sein können. $\mathbf{x}$ in dieser Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t).$$

Lösungsmenge homogener Systeme

Beispiel

Lösungsmenge homogener Systeme

Beispiel

Lösungsmenge inhomogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.8

Sei $\mathbf{x}_p$ *irgendeine* Lösung des inhomogenen linearen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ und sei $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n$ ein Fundamentalsystem und damit $\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$.

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$, die reell oder komplex sein können.

Lösungsmenge inhomogener Systeme

Beispiel

Variation der Konstanten

Satz 6.9

Durch $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ sei ein Fundamentalsystem von $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$ auf $[a, b]$ gegeben. Weiterhin sei

$$X(t) := [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \ldots \ \mathbf{x}_n].$$

Sind die Koomponenten von $\mathbf{g}$ stetig in $[a, b]$, so ist

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t).$$

Dabei gilt $\mathbf{c}(t) = \int \dot{\mathbf{c}}(t)\,dt$ und $\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$X(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{g}(t).$$

Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.7

Beispiele

Variation der Konstanten

Beispiele

Variation der Konstanten

Beispiele

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Buch Kap. 6.7

Satz 6.6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{v} \neq 0$ ein zu λ gehörender Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Hat die Matrix A n voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$,...,$\mathbf{x}_n(t) = e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ ein Fundamentalsystem und durch die Linearkombinationen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

sind sämtliche Lösungen von $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ gegeben.

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Buch Kap. 6.7

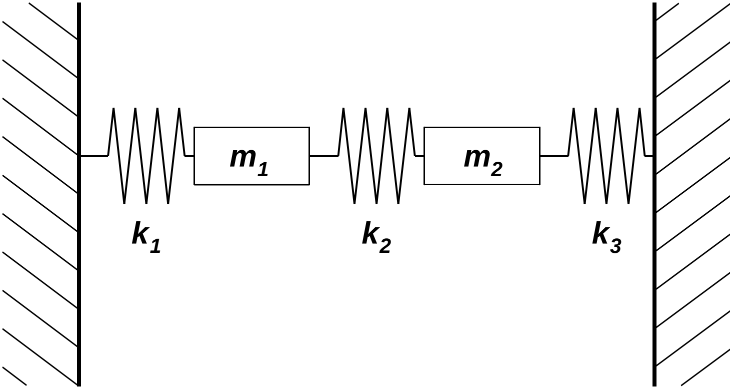


Abbildung 6.8: Zwei-Massen-Schwinger

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Beispiel

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.7

Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängige Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)^\sigma \, \mathbf{v} = \mathbf{0}\,,$$

(sogenannte Hauptvektoren nullter bis $(\sigma - 1)-$ter Stufe), dann sind

$$\mathbf{x}_k = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \, \mathbf{v}_k \,, \quad k = 1, \ldots, \sigma,$$

linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Beispiele

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Beispiele

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Beispiele

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Homogene Anfangswertprobleme für Systeme der Form
($A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

werden in Analogie zum skalaren Fall $n = 1$ mit Hilfe der Matrix Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

durch

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \mathbf{x}_0$$

gelöst.

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Ist $\mathbf{v}$ Hauptvektor zum Eigenwert λ, d.h. gilt

$$(A - \lambda I)^\sigma \mathbf{v} = 0,$$

wobei σ die algebraische Vielfachheit von λ bezeichne, so ergibt

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\sigma-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \mathbf{v}$$

die entsprechende Hauptvektorlösung. Dabei ist jeder Eigenvektor $\mathbf{v}$ natürlich auch Hauptvektor (nullter Stufe).

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Lineare DGL *n*-ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Differentialgleichung *n*-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

Lineare DGL *n*-ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Differentialgleichung *n*-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Definition 6.3

Folgt aus der Beziehung

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) = 0 \text{ auf } [a, b]$$

für n Lösungen $x_1, ..., x_n$ einer homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

$n-$ter Ordnung das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten, also $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, so heisst $x_1, x_2, ..., x_n$ **Fundamentalsystem** der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Wronski–Determinante

Buch Kap. 6.8

Definition 6.4

Seien $x_1, x_2, ..., x_n$ beliebige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung, dann heißt

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

WRONSKI$-$**Determinante** dieser n Lösungen.

Lösbarkeit DGL n−ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Satz 6.10

Die Funktionen $a_i(t),\ i = 0,1,...n-1$, seien stetig auf $[a, b]$.

a) Dann gibt es ein Fundamentalsystem $x_1, ..., x_n$ von

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

und jede Lösung der Differentialgleichung besitzt die Form

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

b) Je n Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre WRONSKI−Determinante $W(t)$ nirgends auf $[a, b]$ verschwindet (Gilt $W(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in [a, b]$, so folgt daraus $W(t) \equiv 0$ auf ganz $[a, b]$).

Lösbarkeit DGL n−ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Satz 6.10 (cont.)

c) Sei die Funktion $g(t)$ stetig auf $[a, b]$. Sei $x_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x = g(t)\ .$$

Ist dann $x_1, ..., x_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, so sind durch

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t)$$

mit Konstanten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung erfasst.

Inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Buch Kap. 6.8

DGL zweiter Ordnung

Die allgemeine Lösung der DGL

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = g(t)$$

hat die Form

$$x(t) = [C_1 - \int \frac{x_2(t)g(t)}{W(t)}dt]\, x_1(t) + [C_2 + \int \frac{x_1(t)g(t)}{W(t)}dt]\, x_2(t),$$

wobei x_1, x_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bildet. Diese Lösungsdarstellung gilt natürlich auch für konstante Koeffizienten.

DGLen mit konstanten Koeffizienten

Definition 6.5 (charakteristisches Polynom)

Bezeichne

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = g(t)$$

eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung (d.h. der DGL mit $g \equiv 0$)
und

$$P(\lambda) = 0$$

heißt die zugehörige **charakteristische Gleichung**.

DGLen mit konstanten Koeffizienten, homogene Lösung

Buch Kap. 6.8

So geht's

DGLen mit konstanten Koeffizienten, homogene Lösung

Buch Kap. 6.8

So geht's

DGLen mit konstanten Koeffizienten, homogene Lösung

Buch Kap. 6.8

So geht's

Einfache Inhomogenitäten, Resonanz

Buch Kap. 6.8

Definition 6.6

In Verallgemeinerung des Resonanzfalles eines Schwingungsproblems wollen wir von Resonanz sprechen, falls die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = g(t)$$

Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0$$

ist.

Ansätze für partikuläre Lösungen

Buch Kap. 6.8

Ansätze

$g(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
$R_m(t)$	$T_m(t)$
$R_m(t)e^{\alpha t}$	$T_m(t)e^{\alpha t}$
$R_m(t)\sin(\beta t)$ $R_m(t)\cos(\beta t)$	$T_m(t)\sin(\beta t)$ $+Q_m(t)\cos(\beta t)$
Kombination d. Funktionen	Kombination d. Ansätze

Ansätze für partikuläre Lösungen

Buch Kap. 6.8

Beispiele

Ansätze für partikuläre Lösungen

Beispiele

Ansätze für partikuläre Lösungen

Buch Kap. 6.8

Beispiele

LAPLACE-Transformation

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Definition 11.4

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Ordnet man f aufgrund der Beziehung

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt\,, \quad s \in \mathbb{C}$$

die Funktion F zu, so nennt man F die LAPLACE-**Transformierte** von f. Die Abbildung von f auf F heißt LAPLACE-Transformation. Neben $F(s)$ verwendet man auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Definition 11.5

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** γ, falls es Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle t mit $0 \leq t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq M\, e^{\gamma\, t}\,.$$

Satz 11.11 (Existenz der LAPLACE-Transformierten)

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig (lokal integrierbar reicht eigentlich aus) und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

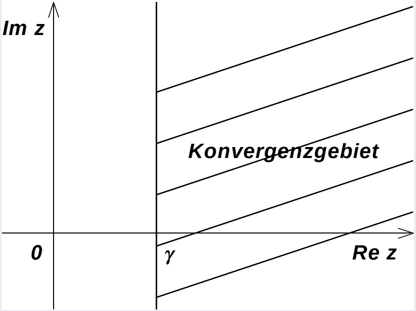


Abbildung 11.3: Konvergenzhalbebene der LAPLACE-Transformation

Beispiele

Beispiele

Beispiele

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.7

Satz 11.13 (Eindeutigkeitssatz)

Für die Funktionen $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seien von exponentieller Ordnung γ und stückweise glatt. Ferner gelte $F_1(s) = F_2(s)$ für $Re\, s > \gamma$. Dann gilt in jedem gemeinsamen Stetigkeitspunkt von f_1 und f_2

$$f_1(t) = f_2(t)\ .$$

Mit diesem Eindeutigkeitssatz ist es nun möglich, von einer LAPLACE-Transformierten $F(s)$ auf die eindeutig bestimmte Funktion $f(t)$ mit

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

zu schließen.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.7

Hierfür benötigen wir ein wenig Funktionentheorie $\to$ nächstes Semester.

Satz 11.12 (Umkehrsatz für die LAPLACE-Transformation)

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei von exponentieller Ordnung γ und stückweise glatt. Dann gilt für alle $\sigma = \operatorname{Re} s > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(\sigma + i\,\omega) e^{(\sigma+i\,\omega)t}\, d\omega \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{für} \quad t > 0, \\ \frac{f(0+0)}{2} & \text{für} \quad t = 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(\sigma + i\,\omega) e^{(\sigma+i\,\omega)t}\, d\omega\ .$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.7

Beispiele

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.7

Beispiele

Beispiele

LAPLACE-Transformation

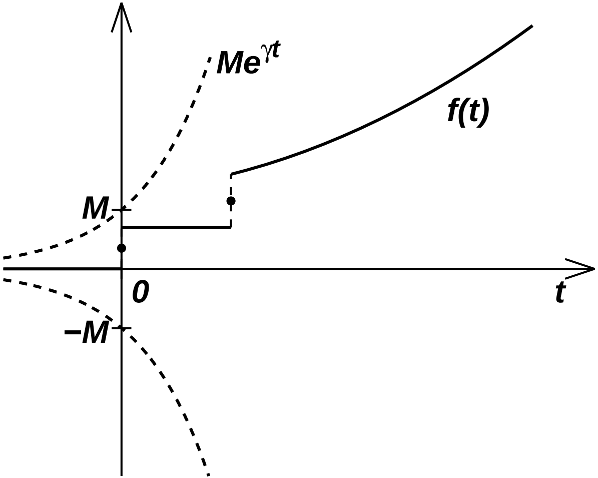


Abbildung 11.5: Voraussetzungen der Sätze 11.12 und 11.13: $f(t)$ von exponentieller Ordnung, stückweise glatt, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Alle auftretenden Funktionen seien von exponentieller Ordnung γ.

Satz 11.14 (Linearität der Laplace Transformation)

Seien f und g in $[0, \infty[$ stückweise stetige Funktionen. Dann gilt für beliebige reelle/komplexe Koeffizienten a, b

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \; .$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Alle auftretenden Funktionen seien von exponentieller Ordnung γ.

Satz 11.15 (Transformation der Ableitung und des Integrals)

a) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\ .$$

b) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k\,\mathcal{L}[f(t)] - s^{k-1}\,f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)\ .$$

c) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]\ .$$

Beispiele

Beispiele

Beispiele

Beispiele

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Satz 11.16:(LAPLACE-Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion)

$f(t)$ habe an der Stelle $t = a > 0$ eine Sprungstelle. Ansonsten seien die Voraussetzungen des Satzes 11.15 a) erfüllt. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-as}\ .$$

LAPLACE-Transformation

Konvention

Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ betrachten wir stets als eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei wir $f(t) = 0$ setzen für $t < 0$.

Satz 11.17 (Dämpfung-Verschiebung, Streckung)

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion von exponentieller Ordnung γ,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \ (\mathrm{Re}\, s > \gamma).$$

a) Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich, d.h.,

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad \text{für} \quad Re\, s > \gamma - a\,.$$

b) Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})\,, \quad \text{für} \quad Re\, s > a \cdot \gamma\,.$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Definition 11.6 (Faltung)

Unter dem **Faltungsprodukt** der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wollen wir allgemein

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

verstehen. Dabei sei die Existenz des uneigentlichen Integrals vorausgesetzt.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Bemerkung

Für $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau \\
&= \int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

sowie $(f * g)(t) = 0$, wenn $t < 0$.

Beispiele (Faltung)

Beispiele (Faltung)

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Satz 11.18 (Faltungsregel)

Die Funktion f sei in $\mathbb{R}$ stetig, die Funktion g stückweise stetig. Beide seien von exponentieller Ordnung γ, und es gelte $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte der Faltung $f * g$ für $Re\, s > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \, ,$$

Beispiele (Faltung und Laplace-Transformation)

Beispiele (Faltung und Laplace-Transformation)

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Satz 11.19 (LAPLACE-Transformation einer T-periodischen Funktion)

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine T-periodische, stückweise stetige und beschränkte Funktion. Dann gilt für $\operatorname{Re} s > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-su} f(u)\, du\,.$$

Beispiele

Beispiele

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Satz 11.20 (LAPLACE-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion)

Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f LAPLACE-transformierbar sowie $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ die LAPLACE-Transformierte von f. Dann gilt

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s) \; .$$

Beispiele

Satz 11.21 (Verschiebungssatz, Transformation eines plötzlichen Einschaltvorgangs)

Sei $g(t)$ eine stückweise stetige Funktion und a eine positive Zahl. Dann gilt

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)g(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[g(t)] \ .$$

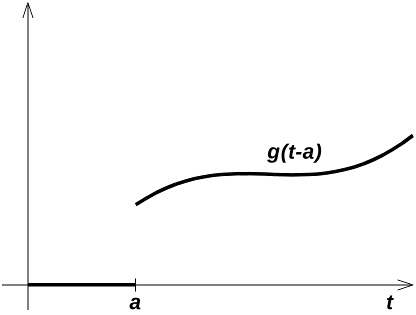


Abbildung 11.7: Aktivierung einer Störung $g(t-a)$ zum Zeitpunkt

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Laplace-Transformation - Definition - Rechenregeln

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,\ F : D \to \mathbb{C}$

Transformation von f'	$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$
Transformation von $f^{(n)}$	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
Transformation des Integrals	$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\,d\tau] = \frac{1}{s}F(s)$
Dämpfung/Verschiebung	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$

Buch Kap. 11.8

Laplace-Transformation - Definition - Rechenregeln

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,\ F : D \to \mathbb{C}$

Streckung	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
Faltungsregel	$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$
Produkt mit t^n	$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$
Einschaltvorgang bei $t = a$	$\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$
$y'' + ay' + by = 0$	$s^2F(s) - sy_0 - y_1$ $+asF(s) - y_0 + bF(s) = 0$
$y(0) = y_0, y'(0) = y_1$	$\mathcal{L}[y(t)] = F(s) = \frac{y_0+y_1+sy_0}{s^2+az+b}$

Stabilität

Stabilität

Pendel

Stabilität

Pendel

Stabilität

Gleichgewicht

Stabilität

Definition (Stabilität eines Gleichgewichts)

Stabilität

Definition (Stabilität allgemein)

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Stabilität

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
- Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

Stabilität

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
- Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

Stabilität

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
- Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

Stabilität

Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Sei $A(\cdot) : [t_0, \infty) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $X(\cdot) : [t_0, \infty) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zugehörige Fundamentalmatrix.

- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$.
- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann asymptotisch stabil, wenn $\{X(t)\ :\ t \geq t_0\}$ beschränkt.

Stabilität

Jordan-Blöcke

Stabilität

Jordan-Blöcke

Stabilität

Jordan-Blöcke

Stabilität

Stabilität linearer DGLn

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ UND für alle Eigenwerte λ von A gilt: Wenn $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, dann ist die algebraische Vielfachheit von λ gleich der geometrischen Vielfachheit von λ ist.

Stabilität

Stabilität linearer DGLn

Stabilität

Linearisierung

Stabilität

Linearisierung

Stabilität

Satz (Stabilität und Linearisierung)

Gegeben sei eine DGL $\dot{x} = f(x(t))$ mit Gleichgewicht x_0. Sei $A := f'(\bar{x})$. Dann gilt:

- Besitzt A einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, so ist das Gleichgewicht $\bar{x}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ instabil.
- Haben alle Eigenwert von A einen negativen Realteil, so ist das Gleichgewicht $\bar{x}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ asymptotisch stabil.

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Stabilität

Wir betrachten die DGL

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \text{mit } \; f(0) = 0.$$

Definition

Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt Ljapunov–Funktion auf $K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| < r\} \subset D$ für $\dot{x}(t) = f(x(t))$, falls gilt

a) $V(0) = 0$ und

$$V(x) > 0 \text{ für } x \in K_r(\mathbf{0}) \setminus \{0\}$$

b)

$$\nabla V \cdot x \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

Gilt in b) sogar

b')

$$\nabla V \cdot x < 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

so nennt man $V(\cdot)$ eine strenge Ljapunov–Funktion.

Stabilität

Satz (Stabilitätssatz mit Ljapunov–Funktionen)

1) Existiert eine Ljapunov–Funktion $V(x)$ von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

2) Ist $V(x)$ zudem eine strenge Ljapunov–Funktion von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Stabilität

Stabilität und Ljapunov