Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2018/2019

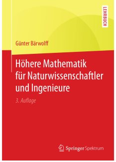
Allgemeine Informationen

Informationsquellen

- https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d1/1819/
- http://webcast.tu-harburg.de/Mediasite/Play/f037c78d25a949c984620c550d8089811d
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab 29.10.2018)
  Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab 22.10.2018)
  Montag, 12:30–14:00 Uhr, Audimax I
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 13:30–14:30

Literatur

PRIMÄR:



G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`

SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Differentialgleichungen I

1. Einführung und elementare Methoden
2. Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben
3. Lineare Differentialgleichungen
4. Laplace-Transformation
5. Stabilität und qualitatives Lösungsverhalten
6. (Randwertaufgaben und Grundbegriffe der Variationsrechnung)
7. (Eigenwertaufgaben)
8. (Numerische Verfahren zur Integration von Anfangs- und Randwertaufgaben)

Einführung und elementare Methoden

Differentialgleichungen

Buch Kap. 6.1

Anwendung von Differentialgleichungen auf technische Fragestellungen

a) Mathematische Modellierung eines (technischen) Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung
b) Formulierung (physikalisch) sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen
c) Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- bzw. Randbedingungen
d) Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung

Allgemeine Begriffe

Notation: Ableitung

Sei I ein Intervall, $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$.

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$$ erste Ableitung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t)$$ zweite Ableitung

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) := \frac{d^n}{dt^n}\mathbf{x}(t)$$ n-te Ableitung

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dx^n}$$

Wir setzen zudem

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) := \mathbf{x}(t).$$

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Definition 6.1: (gewöhnliche Differentialgleichung)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung *n*-ter Ordnung für eine Funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ist eine Gleichung zwischen t, $\mathbf{x}$ und den Ableitungen von $\mathbf{x}$ bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)) = 0 \qquad \text{(implizite Form).}$$

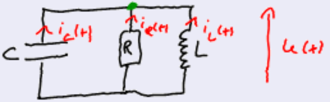
Liegt diese Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von $\mathbf{x}$ vor, so spricht man von der expliziten Form:

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)) \qquad \text{(explizite Form).}$$

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele



Eliminiere Ströme

$$0 = \underbrace{\dot i_C(t)}_{= C\ddot u(t)} + \underbrace{\dot i_L(t)}_{= \frac{1}{L} u(t)} + \underbrace{\dot i_R(t)}_{\frac{1}{R}\dot u(t)}$$

$$\Rightarrow \quad C\ddot u(t) + \frac{1}{L} u(t) + \frac{1}{R}\dot u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot u(t) = -\frac{1}{RC}\dot u(t) - \frac{1}{LC} u(t)$$

Dgl zweiter Ordnung

Relationen

$$\boxed{\begin{aligned} i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) &= 0 \\ u(t) - R\, i_R(t) &= 0 \\ i_C(t) - C\,\dot u(t) &= 0 \\ u(t) - L\,\dot i_L(t) &= 0 \end{aligned}}$$

implizite Form

$$F(t, \dot x(t), x(t)) = 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_C(t) \\ i_L(t) \\ i_R(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

implizite Form

Wir benötigen noch „Anfangswerte" $\dot u(0) = u_{10}$, $u(0) = u_{00}$, um das System vollst. zu beschreiben.

Allgemeine Begriffe

Beispiele

Relationen

$x(t)^2 + y(t)^2 - \ell^2 = 0$ (Seillänge fix)

$m\begin{pmatrix}\ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = 0$

(Kraftbilanz)

Ansatz

$F_{seil}(t) = \lambda(t)\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

$\downarrow$ Schwerkraft mg

Implizite Dgl. mit

$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ \lambda(t)\end{pmatrix}$ $\quad F(t, \ddot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = 0$

Löse Seillängengleichung auf:

Ansatz: $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell \sin(\varphi(t))\\ -\ell \cos(\varphi(t))\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell \cos(\varphi(t))\, \dot{\varphi}(t)\\ \ell \sin(\varphi(t))\, \dot{\varphi}(t)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\ell \sin\varphi(t)\, \dot{\varphi}^2(t) + \ell \cos(\varphi(t))\, \ddot{\varphi}(t)\\ \ell \cos\varphi(t)\, \dot{\varphi}^2(t) + \ell \sin(\varphi(t))\, \ddot{\varphi}(t)\end{pmatrix}$

Allgemeine Begriffe

Beispiele

$$m\left(-\ell \sin(\varphi(t))\,\dot\varphi^2(t) + \ell\cos(\varphi(t))\,\ddot\varphi(t)\right) + \lambda(t)\cdot\ell\,\sin(\varphi(t)) = 0 \qquad (i)$$

$$m\left(\ell\cos(\varphi(t))\,\dot\varphi^2(t) + \ell\sin(\varphi(t))\,\ddot\varphi(t)\right) - \lambda(t)\,\ell\cos(\varphi(t)) - mg = 0 \qquad (ii)$$

$\cos(\varphi(t))\cdot(i) + \sin(\varphi(t))\cdot(ii)$ ergibt

$$m\left(\cancel{-\ell\sin\cos\dot\varphi^2} + \ell\cos^2\ddot\varphi \cancel{+\ell\sin\cos\dot\varphi^2} + \ell\sin^2\ddot\varphi\right) - mg\sin(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow\quad m\ell\,\ddot\varphi(t) - mg\sin(\varphi(t)) = 0$$

$$\Rightarrow\quad \ddot\varphi(t) = \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t))$$

expl. Dgl. 2. Ordnung