LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Definition 11.6 (Faltung)

Unter dem **Faltungsprodukt** der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wollen wir allgemein

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

verstehen. Dabei sei die Existenz des uneigentlichen Integrals vorausgesetzt.

$$(f*g)*h = f*(g*h) \qquad f*(g+h) = f*g + f*h$$

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\,g(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = (g*f)(t)$$

$x = t-\tau \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = -1 \Rightarrow dx = -d\tau$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Bemerkung

Für $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau$$
$$= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$$

sowie $(f * g)(t) = 0$, wenn $t < 0$.

Beispiele (Faltung)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ e^{at} & : t \geq 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ e^{bt} & : t \geq 0 \end{cases}$$

$$(f * g)(t) = 0 \quad : t < 0.$$

$t \geq 0$:

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} \, e^{b\tau} \, d\tau = \int_0^t e^{at} \, e^{-a\tau} \, e^{b\tau} \, d\tau = e^{at} \int_0^t e^{\tau(b-a)} \, d\tau$$

Fallunterscheidung:

i) $b \neq a$: $(f * g)(t) = e^{at} \int_0^t e^{\tau(b-a)} \, d\tau = e^{at} \frac{1}{b-a} e^{\tau(b-a)} \Big|_0^t$

$$= \frac{e^{at}}{b-a} \left(e^{t(b-a)} - 1 \right) = \frac{1}{b-a} \left(e^{bt} - e^{at} \right)$$

ii) $b = a$: $(f * g)(t) = e^{at} \int_0^t 1 \, d\tau = t \, e^{at}$

Beispiele (Faltung)

Buch Kap. 11.8

Satz 11.18 (Faltungsregel)

Die Funktion f sei in $\mathbb{R}$ stetig, die Funktion g stückweise stetig. Beide seien von exponentieller Ordnung γ, und es gelte $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte der Faltung $f * g$ für $Re\, s > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \,,$$

Beispiele (Faltung und Laplace-Transformation)

$$f(t) = \begin{cases} 0 : t \leq 0 \\ e^{at} : t \geq 0 \end{cases} = H(t) \cdot e^{at} \qquad g(t) = H(t)\, e^{bt}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \qquad G(s) = \frac{1}{s-b}$$

$$L(f * g) = F(s)\, G(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$b \neq a: \quad L(f * g) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{\frac{1}{a-b}}{s-a} + \frac{\frac{1}{b-a}}{s-b} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right)$$

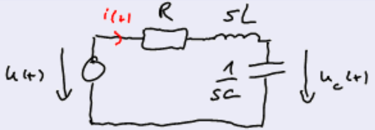
$$(f * g)(t) = \frac{1}{b-a}\left(H(t)\, e^{bt} - H(t)\, e^{at}\right) = \frac{H(t)}{b-a}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$$

$$b = a: \quad L(f * g) = \frac{1}{(s-a)^2} \Rightarrow (f * g)(t) = H(t) \cdot t\, e^{at}$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Beispiele (Faltung und Laplace-Transformation)



$$U(s) = R\,I(s) + sL\,I(s) + \frac{1}{sC}\,I(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s)$$

$$I(s) = sC\,U_c(s)$$

$$U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) sC\,U_c(s) = \left(RCs + s^2LC + 1\right) U_c(s)$$

$$U_c(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}\,U(s) \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2LC + sRC + 1}\right) * u(t)$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Satz 11.19 (LAPLACE-Transformation einer T-periodischen Funktion)

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine T-periodische, stückweise stetige und beschränkte Funktion. Dann gilt für Re $s > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-su} f(u)\, du \,.$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

$$u_c(t) = (h * u)(t) = \int_0^t u(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

Beispiele

$$U_c(s) = G(s)\, U(s) \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

Annahme: $L = 1\,H \quad C = 1\,F \quad , \quad R = 2\,\Omega$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad h(t) := \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = H(t) \cdot t\, e^{-t}$$

$$\Rightarrow u_c(t) = (h * u)(t) = \int_0^t (t-\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau$$

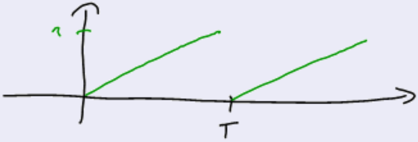
Notation (Regelungstechnik)

$G(s)$: Übertragungsfunktion , $\quad h(t)$: Impulsantwort

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Beispiele



$f(t) = \frac{1}{T}\, t$ auf $[0,T)$

periodisch fortgesetzt

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T \frac{1}{T}\, t\; e^{-st}\, dt = \frac{1}{T(1-e^{-sT})} \int_0^T \underset{u}{t}\; \underset{v'}{e^{-st}}\, dt$$

$$= \frac{1}{T(1-e^{-sT})} \left(\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_T^0 + \int_0^T \frac{1}{s} e^{-st}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{T(1-e^{-sT})} \left(\frac{-T}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^T \right) = \frac{1}{T(1-e^{-sT})} \left(\frac{-T}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \right)$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Satz 11.20 (LAPLACE-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion)

Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f LAPLACE-transformierbar sowie $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ die LAPLACE-Transformierte von f. Dann gilt

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s) \; .$$

Beispiele

Satz 11.21 (Verschiebungssatz, Transformation eines plötzlichen Einschaltvorgangs)

Sei $g(t)$ eine stückweise stetige Funktion und a eine positive Zahl. Dann gilt

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)g(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[g(t)]\ .$$

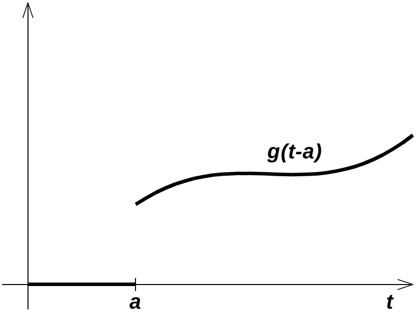


Abbildung 11.7: Aktivierung einer Störung $g(t-a)$ zum Zeitpunkt

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Buch Kap. 11.8

Laplace-Transformation - Definition - Rechenregeln

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,\ F : D \to \mathbb{C}$

Transformation von f'	$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$
Transformation von $f^{(n)}$	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
Transformation des Integrals	$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\,d\tau] = \frac{1}{s}F(s)$
Dämpfung/Verschiebung	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$

Laplace-Transformation - Definition - Rechenregeln

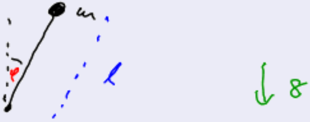
$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,\; F : D \to \mathbb{C}$

Streckung	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
Faltungsregel	$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$
Produkt mit t^n	$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$
Einschaltvorgang bei $t = a$	$\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$
$y'' + ay' + by = 0$	$s^2F(s) - sy_0 - y_1$ $+asF(s) - y_0 + bF(s) = 0$
$y(0) = y_0, y'(0) = y_1$	$\mathcal{L}[y(t)] = F(s) = \frac{y_0+y_1+sy_0}{s^2+az+b}$

Stabilität

Stabilität

Pendel



$x_1(t) = \varphi(t)$

$x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$

Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

Konst. Lsgen: $\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $n \in \mathbb{Z}$.

Stabilität

Gleichgewicht

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewicht von $\dot{x}(t) = f(x(t))$,

wenn $x(t) \equiv \bar{x}$ Lösung ist.

Beachte: $\bar{x}$ ist Gleichgewicht

$\Longleftrightarrow \quad f(\bar{x}) = 0$

Stabilität

Definition (Stabilität eines Gleichgewichts)

Das Gleichgewicht $\bar{x}$ von $\dot{x}(t) = f(x(t))$ heißt „stabil",

wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass

Wenn $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, dann gilt: Die Lösung(en) von

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad \text{erfüllt} \quad |x(t) - \bar{x}| < \varepsilon \ \forall t \geq t_0.$$

Wenn zusätzlich gilt $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$, dann heißt $\bar{x}$ „asymptotisch stabil".