Lineare DGLen

Lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)\ , \tag{5}$$

heißt lineare Differentialgleichung (in Normalform).
Die Differentialgleichung (5) heißt homogen linear, falls $q(\cdot) = 0$, anderenfalls inhomogen linear.

$$|x(t)| = e^{C_0} e^{-P(t)} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = C\, e^{-P(t)} \ \ (C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wobei $P(t)$ Stammfunktion von $p(t)$ ist, d.h. $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$. Für $C = 0$ folgt $x(t) \equiv 0$.

$\dot{X}(t) = -p(t)\, x(t)$ (homogener Fall)

Lsg durch Trennung d. Veränd.: $|x(t)| = e^{C_0}\, e^{-P(t)}$ mit $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$

Allg. Lsg: $x(t) = C\, e^{-P(t)}$, $C \in \mathbb{R}$

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Lsg des AWPs: $\dot{x}(t) = -p(t)\,x(t)$, $x(t_0) = x_0$ ist $x(t) = x_0 e^{-P(t)}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Ansatz für Lösung in homogener Gleichung

$$x(t) = C(t)e^{-P(t)}.$$

Einsetzen in $\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$ ergibt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} - \cancel{C(t)p(t)e^{-P(t)}} + \cancel{p(t)C(t)e^{-P(t)}} = q(t)\,.$$

Daraus folgt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} = q(t) \Longrightarrow \dot{C}(t) = q(t)e^{P(t)} \Longrightarrow \underline{C(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)e^{P(\tau)}\,d\tau + C_1}$$

mit einer beliebige Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

AWP: $\dot{x}(t) + p(t)\,x(t) = q(t)$, $x(t_0) = x_0$

hat eind. Lsg $\quad x(t) = x_0 e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, e^{P(\tau)} d\tau$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Damit gilt

$$x(t) = \boxed{C_1 e^{-P(t)}} + \boxed{e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} q(\tau) e^{P(\tau)}\, d\tau} =: x_{hom}(t) + x_{inh}(t)\ .$$

$x(t) = \boxed{x_{hom}(t)} + \boxed{x_{inh}(t)}$ erfüllt für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Gleichung.

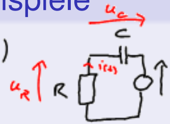
$$x_{inh}(t) = e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, e^{P(\tau)}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, e^{P(\tau)-P(t)}\, d\tau$$

$$P(\tau) - P(t) = \int_{t_0}^{\tau} p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds = \int_{t}^{\tau} p(s)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, e^{\int_t^{\tau} p(s)ds}\, d\tau$$

Beispiele

a)



$u(t) = \sin(\omega t)$

$$\int e^{\lambda \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C$$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \dot{u}(t) = \dot{u}_R(t) + \dot{u}_C(t) = R\,\dot{i}(t) + \frac{1}{C}\, i(t)$$

$$\Rightarrow \dot{i}(t) + \frac{1}{RC}\, i(t) = \frac{1}{R}\,\dot{u}(t) = \frac{\omega}{R}\cos(\omega t)$$

$$i(0) = i_0$$

$p(t) = \frac{1}{RC}$, $q(t) = \frac{\omega}{R}\cos(\omega t)$, $t_0 = 0$

$P(t) = \int_0^t \frac{1}{RC}\, d\tau = \frac{t}{RC}$,

$$\int_0^t q(\tau)\, e^{+P(\tau)}\, d\tau = \frac{\omega}{R}\int_0^t \cos(\omega\tau)\, e^{\frac{\tau}{RC}}\, d\tau$$

$$= \frac{\omega}{2R}\int_0^t \left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right) e^{\frac{\tau}{RC}}\, d\tau$$

$$= \frac{\omega}{2R}\int_0^t e^{(i\omega + \frac{1}{RC})\tau} + e^{(-i\omega + \frac{1}{RC})\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{\omega}{2R}\left(\frac{1}{i\omega + \frac{1}{RC}}\, e^{(i\omega+\frac{1}{RC})\tau}\Big|_0^t + \frac{1}{-i\omega + \frac{1}{RC}}\, e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})\tau}\right)$$

Beispiele

$$= \frac{\omega}{2R}\left(\frac{RC}{1+i\omega RC}\left(e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}-1\right)+\frac{RC}{1-i\omega RC}\left(e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})t}-1\right)\right)$$

$$= \frac{\omega}{2R}\left(-\frac{RC}{1+i\omega RC}-\frac{RC}{1-i\omega RC}+\frac{RC}{1+i\omega RC}e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}+\frac{RC}{1-i\omega RC}e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})t}\right)$$

$$= \frac{\omega}{2R(1+\omega^2R^2C^2)}\Big(-RC(1-\cancel{i\omega RC})-RC(1+\cancel{i\omega RC})+RC(1-i\omega RC)e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}$$
$$+RC(1+i\omega RC)e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})t}\Big)$$

$$= \frac{\omega C}{2(1+\omega^2R^2C^2)}\left(-2+\left(e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}+e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})t}\right)+i\omega RC\left(e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}-e^{(-i\omega+\frac{1}{RC})t}\right)\right)$$

$$= \frac{\omega C}{2(1+\omega^2R^2C^2)}\left(-2+\underbrace{\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}_{=2\cos(\omega t)}e^{\frac{t}{RC}}+i\omega RC\underbrace{\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)}_{2i\sin(\omega t)}e^{\frac{t}{RC}}\right)$$

$$= \frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}\left(-1+\cos(\omega t)\,e^{\frac{t}{RC}}-RC\omega\sin(\omega t)\,e^{\frac{t}{RC}}\right)$$

Beispiele

$$\frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}\left(e^{\frac{t}{RC}}\left(\cos(\omega t)-RC\omega\sin(\omega t)\right)-1\right)$$

$$\Rightarrow\quad i(t)=i_0\,e^{-\frac{t}{RC}}+e^{-\frac{t}{RC}}\,\frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}\left(e^{\frac{t}{RC}}\left(\cos(\omega t)-RC\omega\sin(\omega t)\right)-1\right)$$

$$=i_0\,e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}\left(\cos(\omega t)-RC\omega\sin(\omega t)-e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

$$\xrightarrow[\omega\to\infty]{}0 \qquad \xrightarrow[\omega\to\infty]{}\frac{1}{R}\sin(\omega t)$$

Lineare DGLen, Ansätze für $p \equiv$ const.

Buch Kap. 6.5

Für

$$\dot{x}(t) + px(t) = q(t)$$

liefern die folgenden Ansätze partikuläre Lösungen:

Inhomogenität q	Ansatz für x_{inh}
$\sum_{k=1}^{m} a_k t^k$	$\sum_{k=1}^{m} A_k t^k$
$a_1 e^{at}$	$A_1 e^{at}$ für $a \neq -p$
$a_1 e^{at}$	$tA_1 e^{at}$ für $a = -p$
$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$	$A \sin(\omega t - B)$

Summen und Produkte der genannten Inhomogenitäten bedingen entsprechende Ansätze für x_{inh}.

Beispiele

$$\dot{i}(t) + \frac{1}{RC} i(t) = \frac{\omega}{R} \cos(\omega t)$$

Ansatz: $i_{inh}(t) = A \cdot \sin(\omega t - B)$

$$\dot{i}_{inh} + \frac{1}{RC} i_{inh} = A\omega \cos(\omega t - B) + \frac{A}{RC} \sin(\omega t - B) = \frac{\omega}{R} \cos(\omega t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\omega t - B) &= \cos(\omega t) \cos(B) + \sin(\omega t) \sin(B) \\ \sin(\omega t - B) &= -\cos(\omega t) \sin(B) + \sin(\omega t) \cos(B) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{R} \cos(\omega t) = \cos(\omega t) A \left(\omega \cos(B) - \frac{1}{RC} \sin(B) \right)$$

$$+ \sin(\omega t) A \Big(\underbrace{\omega \sin(B) + \frac{1}{RC} \cos(B)}_{=0} \Big) \quad \wedge \frac{\omega}{R} = A \left(\omega \cos(B) - \frac{1}{RC} \sin(B) \right)$$

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

$$\frac{\omega}{R} = A\left(\omega \cos(B) - \frac{1}{RC}\sin(B)\right)$$

$$0 = \omega \sin(B) + \frac{1}{RC}\cos(B) \Rightarrow 0 = \underbrace{\frac{\sin B}{\cos B}}_{\tan B} \cdot \omega + \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tan B = -\frac{1}{RC\omega}$$