LAPLACE-Transformation

Laplace-Transformation

Buch Kap. 11.6

Definition 11.4

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Ordnet man f aufgrund der Beziehung

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt\,, \quad s \in \mathbb{C}$$

die Funktion F zu, so nennt man F die Laplace-**Transformierte** von f. Die Abbildung von f auf F heißt Laplace-Transformation. Neben $F(s)$ verwendet man auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

Konvention: Für $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ setzen wir $f(t) = 0$ für $t < 0$.

$\Rightarrow F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\,dt$

Annahme: $|f(t)| \leq M e^{-\lambda t}$ für ein $M \geq 0, \lambda > 0$

$\Rightarrow F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Definition 11.5

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** γ, falls es Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle t mit $0 \leq t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq M\, e^{\gamma\, t}\ .$$

Satz 11.11 (Existenz der LAPLACE-Transformierten)

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig (lokal integrierbar reicht eigentlich aus) und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

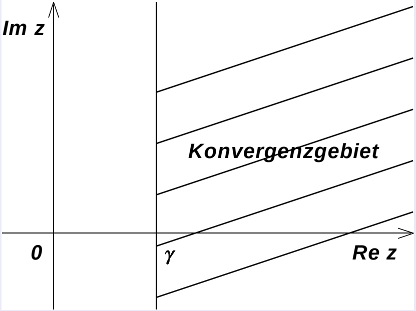


Abbildung 11.3: Konvergenzhalbebene der LAPLACE-Transformation

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Beispiele

a) $a \in \mathbb{C}$ $\qquad f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt \qquad (\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a))$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{a-s} e^{(a-s)0} = \frac{1}{s-a}$$

b) $\omega \in \mathbb{R}$, $\sin(\omega t) = f(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$

$$F(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2i} \frac{s+i\omega - (s-i\omega)}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.6

Beispiele

c) $\omega \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s+i\omega+s-i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

d) $f(t) = t\,e^{at}$ $(a \in \mathbb{C})$ $\quad Re(s) > Re(a)$

$$F(s) = \int_0^\infty \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{(a-s)t}}_{v'}\,dt = -\int_0^\infty \frac{1}{a-s}\,e^{(a-s)t}\,dt + \underbrace{\frac{t}{a-s}\,e^{(a-s)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{a-s}\int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{(s-a)^2}$$

e) $f(t) = t^2 e^{at}$ $(a \in \mathbb{C})$ $\quad Re(s) > Re(a)$

Beispiele

$$F(s) = \int_0^\infty \underbrace{t^2}_{u} \underbrace{e^{(a-s)t}}_{v'} \, dt = -2 \int_0^\infty t \, \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \, dt + \underbrace{\left. \frac{t^2 e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_{t=0}^{t=\infty}}_{=0}$$

$$= \frac{2}{s-a} \int_0^\infty t \, e^{(a-s)t} \, dt = \frac{2}{(s-a)^3}$$

f) $F(s) = \int_0^\infty t^3 \, e^{(a-s)t} \, dt = - \int_0^\infty \frac{3t^2}{a-s} \, e^{(a-s)t} \, dt$

$$= \frac{6}{(s-a)^4}$$

g) $f(t) = t^n \, e^{at}$ $\qquad F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Satz 11.13 (Eindeutigkeitssatz)

Für die Funktionen $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seien von exponentieller Ordnung γ und stückweise glatt. Ferner gelte $F_1(s) = F_2(s)$ für $Re\, s > \gamma$. Dann gilt in jedem gemeinsamen Stetigkeitspunkt von f_1 und f_2

$$f_1(t) = f_2(t) \, .$$

Mit diesem Eindeutigkeitssatz ist es nun möglich, von einer LAPLACE-Transformierten $F(s)$ auf die eindeutig bestimmte Funktion $f(t)$ mit

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

zu schließen.

Laplace-Transformation

Buch Kap. 11.7

Hierfür benötigen wir ein wenig Funktionentheorie $\to$ nächstes Semester.

Satz 11.12 (Umkehrsatz für die Laplace-Transformation)

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei von exponentieller Ordnung γ und stückweise glatt. Dann gilt für alle $\sigma = \operatorname{Re} s > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(\sigma + i\,\omega) e^{(\sigma+i\,\omega)t}\, d\omega \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{für} \quad t > 0, \\ \frac{f(0+0)}{2} & \text{für} \quad t = 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(\sigma + i\,\omega) e^{(\sigma+i\,\omega)t}\, d\omega\ .$$

Beispiele

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{\sigma-a+i\omega} e^{(\sigma+i\omega)t}\, d\omega$$

$$\sigma > \gamma$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{\sigma-a+i\omega} e^{(\sigma-a+i\omega)t}\, d\omega}_{=1}\; e^{at}$$

$$= e^{at}$$

Beispiele

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^3-2s^2+s} = \frac{2s+1}{s(s-1)^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$\frac{2s+1}{s(s-1)^2} - \frac{1}{s} - \frac{3}{(s-1)^2} = \frac{2s+1-s^2+2s-1-3s}{s(s-1)^2} = \frac{-s^2+s}{s(s-1)^2} \quad -s(s-1)$$

$$= \frac{-1}{s-1}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow f(t) = 1 + 3t\,e^t - e^t = 1 + e^t(3t-1)$$

Beispiele

LAPLACE-Transformation

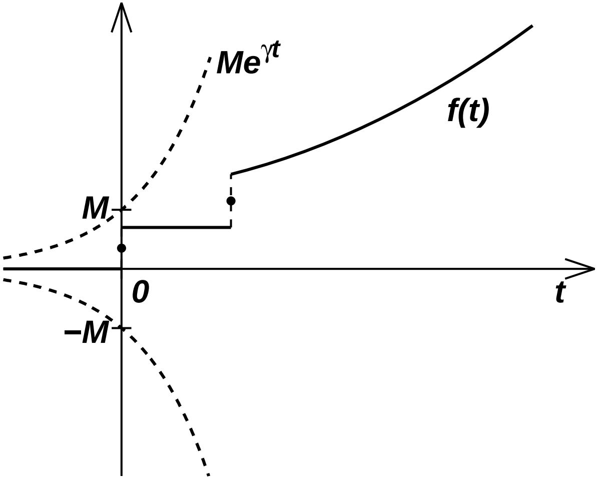


Abbildung 11.5: Voraussetzungen der Sätze 11.12 und 11.13: $f(t)$ von exponentieller Ordnung, stückweise glatt, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Alle auftretenden Funktionen seien von exponentieller Ordnung γ.

Satz 11.14 (Linearität der Laplace Transformation)

Seien f und g in $[0, \infty[$ stückweise stetige Funktionen. Dann gilt für beliebige reelle/komplexe Koeffizienten a, b

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \, .$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Alle auftretenden Funktionen seien von exponentieller Ordnung γ.

Satz 11.15 (Transformation der Ableitung und des Integrals)

a) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\ .$$

b) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k\,\mathcal{L}[f(t)] - s^{k-1}\,f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)\ .$$

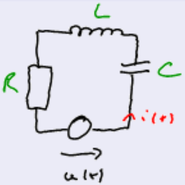
c) Die Funktion f sei in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann gilt für $Re\, s > \gamma$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]\ .$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Beispiele



$$\dot u(t) = -R\,\dot i(t) - L\,\ddot i(t) - \frac{1}{C}\, i(t)$$

$$\ddot i(t) = -\frac{R}{L}\,\dot i(t) - \frac{1}{LC}\, i(t) - \frac{1}{L}\,\dot u(t)$$

$$\Rightarrow s^2 I(s) - s\, i(0) - \dot i(0) = -\frac{R}{L}\left(s I(s) - i(0)\right) - \frac{1}{LC} I(s) - \frac{1}{L}\left(U(s) - u(0)\right)$$

$$\Rightarrow I(s)\left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}\right) = i(0)\left(s + \frac{R}{L}\right) + \dot i(0) - \frac{1}{L} U(s) + \frac{1}{L} u(0)$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{Lc}} \cdot \left(-\frac{1}{L}\right) U(s) + \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} \left(i(0)\left(s + \frac{R}{L}\right) + \dot i(0) + \frac{1}{L} u(0) \right)$$

Beispiele

$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$, sowie $i(0) = \dot{i}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad I(s) = \frac{-C}{CLs^2 + CRs + 1} \quad \underset{\frac{U_0 \omega}{s^2+\omega^2}}{\overset{\wedge}{U(s)}}$$

$$= \frac{-C U_0 \omega}{(LCs^2 + RCs + 1)(s^2+\omega^2)}$$

$C = 1F$, $L = 1H$
$R = 2\Omega$

$$= \frac{-U_0 \omega}{(s^2+2s+1)(s^2+\omega^2)} = -U_0\omega \left(\frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s^2+\omega^2} + \frac{Ds}{s^2+\omega^2} \right)$$

Beispiele

$$\Rightarrow \quad i(t) = -U_0 \omega \left(A t e^{-t} + B e^{-t} + \frac{C}{\omega} \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \right)$$

Beispiele

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Satz 11.16:(LAPLACE-Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion)

$f(t)$ habe an der Stelle $t = a > 0$ eine Sprungstelle. Ansonsten seien die Voraussetzungen des Satzes 11.15 a) erfüllt. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-as} .$$

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

Konvention

Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ betrachten wir stets als eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei wir $f(t) = 0$ setzen für $t < 0$.

LAPLACE-Transformation

Buch Kap. 11.8

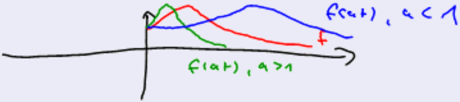
Satz 11.17 (Dämpfung-Verschiebung, Streckung)

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion von exponentieller Ordnung γ,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \ (\mathrm{Re}\, s > \gamma).$$

a) Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich, d.h.,

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad \text{für} \quad Re\, s > \gamma - a\,.$$



b) Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{für} \quad Re\, s > a \cdot \gamma\,.$$