

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzübung

Aufgabe:

Die Lage eines Schwingers (zum Beispiel eines Zylinders, befestigt an einer Feder), der sich in einer zähen Flüssigkeit bewegt, soll durch eine mathematische Gleichung beschrieben werden. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage. In einem einfachen Modell wird angenommen, dass nur

- eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft $F(t) = -D \cdot y(t)$, $D \geq 0$ und
- eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft $\tilde{F}(t) = -\mu \cdot y'(t)$, $\mu \geq 0$

auf den Kolben wirken.

Nach dem Newtonschen Gesetz der Mechanik gilt:

$$\text{Masse (m)} \cdot \text{Beschleunigung (} y''(t) \text{)} = \sum \text{ aller einwirkenden Kräfte.}$$

- a) Durch welche explizite Differentialgleichung wird diese gedämpfte Schwingung beschrieben?
- b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung aus Teil a)?
- c) Wie lautet die Differentialgleichung aus a) im ungedämpften Fall $\mu = 0$ eines Kolbens mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$ wenn $D = 200 \text{ N/m}$ gilt?

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ mit beliebigen reellen Zahlen c_1 und c_2 diese Differentialgleichung lösen.

(ii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0) = 0 \text{ m/s}$ vorgibt?

Können Sie die Position des Zylinders zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (zum Beispiel $t = 10$) angeben?

(iii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man zusätzlich die Anfangsauslenkung $y(0) = 0.5 \text{ m}$ vorgibt?

- d) Gesucht seien nun die Lösungen der Differentialgleichung

$$200 \cdot y''(t) = -40 \cdot y'(t) - 202 \cdot y(t).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = ke^{\lambda t}$, $k, \lambda \in \mathbb{C}$ konstant, Lösungen dieser Differentialgleichung.

Bearbeitungstermine: 09.11.-13.11.2020