

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 1, Präsenzübung

#### Aufgabe:

Die Lage eines Schwingers (zum Beispiel eines Zylinders, befestigt an einer Feder), der sich in einer zähen Flüssigkeit bewegt, soll durch eine mathematische Gleichung beschrieben werden. Wir bezeichnen mit  $y(t)$  die Auslenkung aus der Ruhelage. In einem einfachen Modell wird angenommen, dass nur

- eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft  $F(t) = -D \cdot y(t)$ ,  $D \geq 0$  und
- eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft  $\tilde{F}(t) = -\mu \cdot y'(t)$ ,  $\mu \geq 0$

auf den Kolben wirken.

Nach dem Newtonschen Gesetz der Mechanik gilt:

$$\text{Masse (m)} \cdot \text{Beschleunigung (} y''(t) \text{)} = \sum \text{ aller einwirkenden Kräfte.}$$

- a) Durch welche explizite Differentialgleichung wird diese gedämpfte Schwingung beschrieben?
- b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung aus Teil a)?
- c) Wie lautet die Differentialgleichung aus a) im ungedämpften Fall  $\mu = 0$  eines Kolbens mit der Masse  $m = 50 \text{ kg}$  wenn  $D = 200 \text{ N/m}$  gilt?
  - (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$  mit beliebigen reellen Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  diese Differentialgleichung lösen.
  - (ii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit  $y'(0) = 0 \text{ m/s}$  vorgibt?  
 Können Sie die Position des Zylinders zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (zum Beispiel  $t = 10$ ) angeben?
  - (iii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man zusätzlich die Anfangsauslenkung  $y(0) = 0.5 \text{ m}$  vorgibt?
- d) Gesucht seien nun die Lösungen der Differentialgleichung

$$200 \cdot y''(t) = -40 \cdot y'(t) - 202 \cdot y(t).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes  $y(t) = ke^{\lambda t}$ ,  $k, \lambda \in \mathbb{C}$  konstant, Lösungen dieser Differentialgleichung.

**Bearbeitungstermine:** 09.11.-13.11.2020