

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Wintersemester 2020/21

# Inhalte der Vorlesung Differentialgleichungen I.

- 1 Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen.
- 2 Elementare Lösungsmethoden.
- 3 Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben.
- 4 Lineare Systeme 1. Ordnung, Systeme mit konstanten Koeffizienten.
- 5 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.
- 6 Laplace–Transformation bei Differentialgleichungen.
- 7 Stabilität von Lösungen.
- 8 Randwertaufgaben, Variationsrechnung.
- 9 Numerische Verfahren für Anfangswertaufgaben.
- 10 Numerische Verfahren für Randwertaufgaben.

## 1.1 Einführung und Beispiele

**Definition:** Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$\mathbf{F} : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-fach}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem** der Ordnung  $m$ .

Läßt sich das System nach  $\mathbf{y}^{(m)}(t)$  auflösen, so ergibt sich das **explizite System** der Form:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

# 1.1. Einführung und Beispiele

Im Folgenden suchen wir stets eine  $\mathcal{C}^m$ -Funktion

$$\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt: für  $t \in [a, b]$  gilt also

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

**Spezialfall:** Hängen die Funktionen  $\mathbf{F}$  bzw.  $\mathbf{f}$  nicht explizit von (der Zeit)  $t$  ab, so nennt man das System **autonom**, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch **Trajektorien** der DGL.

# Autonome DGL, Anfangswert- und Randwertaufgabe.

**Beispiel:** Die skalare **autonome** Gleichung erster Ordnung

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

## Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & a \leq t \leq b, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a & \text{(Anfangswert)} \end{cases}$$

## Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & a \leq t \leq b, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 & \text{(Randwert)} \end{cases}$$

# Beispiel 1: Populationsmodell I

Sei  $N(t)$  die Größe einer Population, zum Beispiel Bakterien auf einem Nährboden. Die Änderung der Population in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

die Geburtenrate  $b$  und die Sterberate  $d$ .

Dann gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b - d)N(t)$$

Im Grenzwert  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man die **Differentialgleichung**

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) \quad \text{mit } \alpha = b - d$$

Mit dem Anfangswert  $N(t_0) = N_0$  ergibt sich die **eindeutige** Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

Die Population besitzt also ein **exponentielles Wachstum**.

## Beispiel 2: Populationsmodell II.

Bei exponentiellem Wachstum gilt für  $\alpha > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$$

und das ist **unrealistisch** (zum Beispiel: Weltbevölkerung).  
Suche also ein Modell mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K < \infty$$

**Verhulst:** Wachstumsrate ist eine mit  $N(t)$  linear fallende Funktion

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe lautet dann

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}}$$

und man spricht hier vom **logistischen Wachstum**.

## Beispiel 3: Das Regelkreisglied.

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung

$$y_e(t) = \text{vorgegebene Eingangsgröße}$$

$$y_a(t) = \text{Ausgangsgröße}$$

$$K_F(t) = K(y_e(t) - y_a(t)) = \text{Federkraft}$$

$$K_D(t) = r y_a'(t) = \text{Dämpferkraft}$$

wobei  $K$  die Federkonstante und  $r$  den Dämpfungskoeffizienten bezeichnet.

Modellierung als **gewöhnliche Differentialgleichung** liefert

$$y_a'(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t) \quad \text{mit } \lambda = \frac{K}{r}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von  $y_e(t)$ ,  $t \geq t_0$  ist

$$y_a(t) = y_a(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^t y_e(\tau)e^{\lambda(\tau-t)} d\tau$$



## Beispiel 4: Die Newtonsche Abkühlung.

Für die **Temperatur**  $T(t)$  eines homogenen Körpers gilt (vereinfacht) die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m} (T_a(t) - T(t))$$

Dabei ist

$T_a(t)$  = Umgebungstemperatur

$m$  = Masse des Körpers

$F$  = Oberfläche

$c$  = spezifische Wärme

$k$  = Proportionalitätsfaktor

Die Gleichung ist identisch mit der des **Regelkreisglieds** und insbesondere gilt

$$T(t) \rightarrow T_a(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

## Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis.

Gegeben seien

der Ohmsche Widerstand  $R$ ,

die Induktivität  $L$ ,

die Kapazität  $C$ .

Für die Spannungsabfälle gilt

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad I = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

sowie bei vorgegebener Spannung  $U(t)$

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Wir ersetzen in  $U_R$  und  $U_L$  die Variable  $I$  durch  $C \cdot dU_C/dt$ , und erhalten

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_C}{dt^2} + U_C = U(t)$$

## Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis (Fortsetzung).

Der Schwingkreis wird modelliert durch eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung**:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U(t)$$

**Typisch** ist die Vorgabe einer Wechselspannung, also  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ .

**Beobachtung:** Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \quad \text{und} \quad \frac{dU_C}{dt}(t_0) = C_2$$

Es existiert auch eine Darstellung als **System erster Ordnung**,

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -\frac{R}{L} y_2 - \frac{1}{LC} y_1 + \frac{1}{LC} U$$

wobei  $y_1 := U_C$  und  $y_2 := dU_C/dt$ .

# Das Richtungsfeld einer skalaren Gleichung erster Ordnung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}$$

Betrachte an jedem Punkt  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  den Richtungsvektor

$$v = (1, y')^T$$

in der Tangentenrichtung  $y' = f(t, y)$ .

**Definition:** Ein Tripel  $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$ , das die Gleichung  $y' = f(t, y)$  erfüllt, nennt man ein **Linielement** der Differentialgleichung.

**Beispiele:**

- Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = y$ .
- “**Erraten**” der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds: Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

# Ein Beispiel zum Richtungsfeld.

Die **Linienelemente** der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel  $\left(t, y, -\frac{t}{y}\right) \in \mathbb{R}^3$ .

Der **Richtungsvektor**  $v$  im Punkt  $(t, y)$  ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad \text{mit dem Ortsvektor } r$$

Die Lösungen sind (geometrisch gesehen) Kreise in der  $(t, y)$ -Ebene

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \quad (-r < t < r)$$

## 1.2 Elementare Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einfachen Methoden zur Berechnung von Lösungen der folgenden **einfachen** gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen.

- Separierbare Differentialgleichungen
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- Bernoullische Differentialgleichungen
- Riccatische Differentialgleichungen
- Exakte Differentialgleichungen

# Typ A: Separierbare Differentialgleichungen.

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \cdot g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

in einem Bereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  der  $(t, y)$ -Ebene.

Gilt  $g(y) \neq 0$ , so lassen sich die Variablen  $t$  und  $y$  trennen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t)$$

Integration unter Verwendung der **Substitutionsregel** ergibt

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

# Separierbare Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir mit  $H(y)$  eine Stammfunktion von  $1/g(y)$ , also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt wegen

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

gerade

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Da  $g(y) \neq 0$ , ist die Stammfunktion  $H(y)$  injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1} \left( H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right)$$



# Ein Beispiel für eine separierbare Differentialgleichung.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) &= -t/y \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$y y' = -t \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^y \eta d\eta = - \int_{t_0}^t \tau d\tau$$

Damit folgt

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Wir erhalten also als Lösung einen Kreis um den Ursprung in der  $(t, y)$ -Ebene mit Radius  $r^2$ .

## Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

auf eine separierbare Gleichung zurückführen. Wir schreiben

$$f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

Auflösung nach  $u'(t)$  ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}$$

# Ein Beispiel für eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der  $y$ -Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Das Problem wird modelliert durch die zugehörige Differentialgleichung

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}.$$

Wir verwenden die Substitution  $u = y/t$ :

$$u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{t}$$

Eine Trennung der Variablen liefert zunächst

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\ln \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right) = -\ln |t| + C_1$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Aus der Beziehung (siehe [Skript Analysis II, Seite 37](#))

$$\operatorname{arsinh}(u) = \ln \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right)$$

folgt

$$u = \sinh(-\ln |t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{C_1}}{t} - te^{-C_1} \right)$$

Wählt man  $C = e^{C_1}$ , so erhalten wir

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar

$$t^2 = C^2 - 2Cy$$

# Typ C: Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t).$$

- Man nennt die Funktion  $h(t)$  die **Inhomogenität** der Gleichung.
- Die Differentialgleichung heißt **homogen**, falls  $h(t) = 0$  gilt.
- Die **allgemeine Lösung** läßt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

schreiben.

- Dabei ist  $y_p(t)$  eine **spezielle** (oder partikuläre) Lösung, und  $y_h(t)$  ist die **allgemeine** Lösung der **homogenen** Gleichung

$$y'_h(t) + a(t)y_h(t) = 0$$

# I. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Eine Trennung der Variablen

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

ergibt mit Hilfe einer Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = - \int a(t) dt$$

die **allgemeine Lösung**

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(- \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right)$$

mit einer beliebigen **Integrationskonstanten**  $C \in \mathbb{R}$ .

## II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Dazu verwendet man die Methode der **Variation der Konstanten**

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right)$$

Einsetzen in die **inhomogene** Gleichung ergibt

$$C'(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right) - a(t)y_p(t) + a(t)y_p(t) = h(t)$$

Durch **Integration** der Differentialgleichung für  $C(t)$  erhalten wir

$$C(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi\right) d\tau$$

# Spezialfälle zur Berechnung einer speziellen Lösung.

Für lineare Gleichungen der Form

$$y'(t) + a \cdot y(t) = h(t) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

und speziellen Inhomogenitäten  $h(t)$  macht man folgende Ansätze:

Inhomogenität $h(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
$\sum_{k=0}^m b_k t^k$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$be^{\lambda t}$	$ce^{\lambda t} \text{ für } \lambda \neq -a$ $cte^{\lambda t} \text{ für } \lambda = -a$



## Ein Beispiel für einen solchen Spezialfall.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t d\tau\right) = C \cdot \exp(t_0 - t)$$

Bei der **Variation der Konstanten** ist der Ansatz

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp(t_0 - t)$$

Ein Einsetzen des Ansatzes ergibt schließlich

$$C(t) = \int_{t_0}^t \sin(\tau) \cdot \exp(\tau - t_0) d\tau$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Nach der Tabelle auf Seite 24 suchen wir eine **spezielle** Lösung der Form

$$y_p(t) = C \sin(t - \gamma)$$

Ein Einsetzen von  $y_p(t)$  in die Differentialgleichung ergibt

$$C \cos(t - \gamma) + C \sin(t - \gamma) = \sin t$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt

$$C(\cos t \cos \gamma + \sin t \sin \gamma) + C(\sin t \cos \gamma - \cos t \sin \gamma) = \sin t$$

Wir erhalten also

$$C \cos t \underbrace{(\cos \gamma - \sin \gamma)}_{=0} + C \sin t \underbrace{(\sin \gamma + \cos \gamma)}_{1/C} = \sin t$$

Daraus folgt

$$\gamma = \pi/4 \quad \text{und} \quad C = 1/\sqrt{2}$$

# Typ D: Bernoullische Differentialgleichungen.

Bernoullische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha = 0 \quad \text{mit } \alpha \neq 0, 1$$

Sie lassen sich mit der Substitution

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$u'(t) + (1 - \alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

Probleme ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Zum Beispiel kann  $y(t)$  (in endlicher Zeit) singulär werden.

# Ein Beispiel für eine Bernoullische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

Die Substitution  $u(t) = 1/y(t)$  ergibt

$$u'(t) + u(t) = -t$$

Die allgemeine Lösung  $u(t)$  lautet dann

$$u(t) = \underbrace{C \cdot e^t}_{\text{allg. Lsg. homog. Glchg.}} + \underbrace{1 - t}_{\text{spez. Lsg. inhomog. Glchg.}}$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung  $y(t)$  in der Form

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^t} \quad \text{mit der Konstanten } C$$

Mit  $y(0) = 2$  existiert die Lösung nur auf dem Intervall  $[-1.6783\dots, 0.7680\dots]$ .

# Typ E: Riccatische Differentialgleichungen.

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

Sie lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Ist eine **spezielle** Lösung  $y_p(t)$  bekannt, so liefert die Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

beziehungsweise

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$$

die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

# Ein Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

die  $y_p(t) = 1$  als **spezielle** Lösung besitzt.

Die Substitution  $u(t) = 1/(y(t) - 1)$  bzw.  $y(t) = 1 + 1/u(t)$  liefert

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u^2 y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2 \left( -2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2} \right) = -tu(t) + t \end{aligned}$$

Die **allgemeine** Lösung dieser linearen Gleichung ist

$$u(t) = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

## Typ F: Exakte Differentialgleichungen.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$g(t, y(t)) + h(t, y(t))y'(t) = 0$$

**Definition:** Existiert eine Funktion  $\Phi(t, y)$  mit

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} = g(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = h(t, y),$$

so nennt man die Differentialgleichung  $g + hy' = 0$  **exakt**.

Dann folgt

$$\frac{d\Phi(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y} y'(t) = 0$$

und die Lösungen der Gleichung sind gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = C \in \mathbb{R}$$

# Analysis III: Integrabilitätsbedingung bei Vektorfeldern.

Definieren wir ein **Vektorfeld**  $F(t, y)$  durch

$$F(t, y) := (g(t, y), h(t, y))^T,$$

so heißt Differentialgleichung **exakt**, falls  $F$  ein **Potential** besitzt:

$$g(t, y) = \Phi_t(t, y), \quad h(t, y) = \Phi_y(t, y) \quad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Dies geht nur mit einer zusätzlichen Eigenschaft des Potentials  $F$ , der **Integrabilitätsbedingung**

**Satz:** Sind die beiden Funktionen  $g(t, y)$  und  $h(t, y)$  stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld  $F$  ein Potential  $\Phi$  genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, y)$$

erfüllt ist.



# Berechnung des Potentials einer exakten DGL.

Das Potential  $\Phi(t, y)$  einer exakten Differentialgleichung kann mit **Kurvenintegralen** berechnet werden:

$$\Phi(t, y) = \int_{c(t,y)} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei ist  $c(t,y)$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die den festen Punkt  $(t_0, y_0)$  mit dem variablen Punkt  $(t, y)$  verbindet.

**Beispiel:** Im Zweidimensionalen ( $D = \mathbb{R}^2$ ) kann man den **Hakenweg**

$$(t_0, y_0) \rightarrow (t, y_0) \rightarrow (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\Phi(t, y) = \int_{t_0}^t g(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^y g(t, \eta) d\eta$$

# Ein Beispiel für eine exakte Differentialgleichung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1 + 2ty + y^2) + (t^2 + 2ty)y' = 0 \quad ((t, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2ty) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 2ty + y^2) = 2(t + y)$$

und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, d.h. die Gleichung ist **exakt**.

**Erster Schritt** zur Berechnung des Potentials

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g = 1 + 2ty + y^2$$

Eine Integration bezüglich  $t$  ergibt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

**Beachte:** Integrationskonstante kann von  $y$  abhängen!

## Fortsetzung des Beispiels.

Nach dem ersten Schritt gilt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

**Zweiter Schritt:** Die Funktion  $C(y)$  kann aus der Integrabilitätsbedingung bestimmt werden.

Es muss gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2ty$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{const.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch die implizite Gleichung

$$t(1 + y^2(t)) + t^2y(t) = C$$

# Die Methode des integrierenden Faktors.

Gegeben sei die **nicht** exakte Differentialgleichung

$$g(t, y) + h(t, y) y' = 0$$

Wir suchen nun eine Funktion  $m(t, y)$  so, dass die Gleichung

$$m(t, y)g(t, y) + m(t, y)h(t, y) y' = 0$$

eine **exakte** Differentialgleichung ist.

**Bedingung:** Die Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot h) - \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot g) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\left( h \frac{\partial m}{\partial t} - g \frac{\partial m}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

# Zwei einfache Sonderfälle.

Die Bedingung

$$\left( h \frac{\partial m}{\partial t} - g \frac{\partial m}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

wird in den beiden folgenden Spezialfällen deutlich einfacher.

- 1. Fall: Wir nehmen an, dass  $m = m(t)$  nur von  $t$  abhängt.

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / h \right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

- 2. Fall: Wir nehmen an, dass  $m = m(y)$  nur von  $y$  abhängt.

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / g \right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

## Beispiel mit integrierendem Faktor.

Gegeben sei die **nicht** exakte Gleichung

$$(1 - ty) + (ty - t^2)y' = 0$$

Es gilt:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / h = \frac{y - t}{ty - t^2} = \frac{1}{t}$$

Unser Ansatz lautet

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot m(t) \quad \Rightarrow \quad m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$\left( \frac{1}{t} - y \right) + (y - t)y' = 0 \quad (t \neq 0)$$

exakt und die (implizite) Lösung ist gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = \ln |t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{const.}$$

## 1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

**Typ A:** Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

**Beachte:** die rechte Seite der DGL hängt nicht von  $y(t)$  ab.

Setzen wir  $z(t) := y'(t)$ , so erhalten wir eine Gleichung **erster** Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau$$

## Ein Beispiel zu Typ A.

Die sogenannte **Kettenlinie** ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Substitution  $z(t) := y'(t)$  ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt$$

und daher

$$z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten  $c_1$ .

Integration von  $z(t)$  ergibt die Kettenlinie  $y(t)$  in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k} \cosh(kt + c_1) + c_2$$



## 1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

**Typ B:** Gegeben sei eine autonome Gleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall **streng monoton** ist, so existiert die Umkehrabbildung  $t = t(y)$  und

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Die Substitution  $v(y) := y'(t(y))$  ergibt die Differentialgleichung **erster Ordnung**

$$\frac{dv}{dy} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} f(y, v(y))$$

Ist die Lösung  $v(y)$  bekannt, so erhält man  $y(t)$  durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{v(y)}$$

## 1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

**Typ C:** Betrachte den Spezialfall einer autonomen Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$y'y'' = f(y)y' \Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)dy =: F(y) + C$$

$$\Rightarrow y' = \pm\sqrt{2(F(y) + C)}$$

Die Funktion  $y(t)$  sei auf einem gewissen Bereich invertierbar

$$\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

Dann erhält man  $y(t)$  durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

## Kapitel 2. Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit der rechten Seite  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , und dem Anfangswert  $\mathbf{y}_0 \in D$ .

Die [Fragen](#), die wir beantworten wollen, sind

- 1 [Existiert](#) eine Lösung  $\mathbf{y}(t)$  in einer Umgebung  $|t - t_0| < \varepsilon$  der Anfangszeit?
- 2 Ist die Lösung, falls sie existiert, [eindeutig](#) bestimmt?
- 3 Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit [fortsetzen](#)?
- 4 Wie [verändert](#) sich die Lösung bei einer Störung der Anfangsdaten  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  oder der rechten Seite  $f(t, \mathbf{y})$ ?

# Kapitel 2. Theorie der Anfangswertaufgaben

## 2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

**Beispiel:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt **beliebig viele** Lösungen. Für  $\alpha, \beta > 0$  sind die Lösungen

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t + \alpha)^2 & : -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t + \beta)^2 & : \beta < t < \infty \end{cases}$$

Man beachte die folgenden Eigenschaften der rechten Seite.

- 1 Die rechte Seite ist **stetig** und **beschränkt** auf  $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$ ,  $a > 0$ ,
- 2 Die rechte Seite ist auf  $D$  **nicht** Lipschitz-stetig,
- 3 Die rechte Seite ist bei  $y = 0$  **nicht** differenzierbar.

# Der Existenzsatz von Peano.

**Satz:** ([Existenzsatz von Peano \(1890\)](#)) Die rechte Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  sei auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig und es gelte  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ .

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

im Intervall  $|t - t_0| < \varepsilon$  eine Lösung besitzt.

**Konstruktiver** Beweis mittels des [Eulerschen–Polygonzug–Verfahrens](#):

Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \quad \mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h_i \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

mit den Startwerten  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  und den Schrittweiten  $h_i$ .

Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für  $h_i \rightarrow 0$ .

# Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung.

**Bemerkung:** Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall  $-\infty \leq t_{\min} < t < t_{\max} \leq \infty$  fortsetzen.

Der Graph  $(t, \mathbf{y}(t))$  der Lösung kommt dabei für  $t \rightarrow t_{\min}$  bzw.  $t \rightarrow t_{\max}$  dem Rand von  $D$  beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von  $(t, \mathbf{y}(t))$  für  $t \rightarrow t_{\min}$  bzw.  $t \rightarrow t_{\max}$  liegt auf dem Rand  $\partial D$ .

## Beispiel:

- Die Lösung  $y(t) = \exp(t)$  des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Also ist  $t_{\min} = -\infty$  und  $t_{\max} = \infty$ .

Es ist  $D = \mathbb{R}^2$  und

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-\infty, 0) \in \partial D$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} (t, y(t)) = (\infty, \infty) \in \partial D$$

# Weitere Beispiele zur Fortsetzbarkeit.

## Beispiel:

- Das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

besitzt die Lösung  $y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$ . Dabei ist  $t_{\min} = -r$ ,  $t_{\max} = r$  und

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

- Für das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 0, \quad D = \mathbb{R}^2$$

erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad -\infty = t_{\min} < t < t_{\max} = 1$$

# Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard–Lindelöf.

**Satz:** (Picard–Lindelöf) Die rechte Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  sei stetig auf dem Quader

$$Q := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a \wedge \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty \leq b\}$$

Ferner gelte mit den beiden Konstanten  $M, L > 0$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in Q$$

$$\|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \hat{\mathbf{y}}), (t, \mathbf{y}) \in Q$$

(Lipschitz-Bedingung)

Dann besitzt das Anfangswertproblem  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ ,  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{y}(t)$ , die mindestens im Intervall  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  mit

$$\varepsilon := \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$$

definiert ist.



# Beweisidee zum Satz von Picard–Lindelöf.

Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer **Fixpunktiteration**:

$$\mathbf{y}^{(0)}(t) = \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)}(t) = \mathbf{y}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau)) d\tau$$

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

**Verfahren der sukzessiven Approximation**

Beweis läuft damit analog zum Beweis des Fixpunktsatzes (Analysis II)

# Lipschitz-Bedingung und globale Existenz.

## Bemerkungen:

- Erfüllt die rechte Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  auf  $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$  die Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit  $t_0 \in [t_1, t_2]$  eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz  $[t_1, t_2]$  erklärt ist. Man nennt dies **Globale Existenz**.

- Ein lineares Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

mit stetigen Funktionen  $\mathbf{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$ ,  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

- Ist  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  auf dem Quader  $Q$  eine  $C^1$ -Funktion, so erfüllt  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  dort die Lipschitz-Bedingung.

# Ein Beispiel zum Verfahren der sukzessiven Approximation.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann gilt mit  $y^{(0)}(t) = 1$ :

$$y^{(1)}(t) = y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(\tau) d\tau = 1 + t$$

Mit **Induktion** beweist man dann die Formel

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} t^j$$

Für  $k \rightarrow \infty$  folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)$$

## 2.2 Abhängigkeit von Parametern, Stabilität

Wir betrachten wieder die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit einer rechten Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ , die auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar sei.

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf existiert dann für  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$  eine **eindeutig bestimmte lokale Lösung**  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ , die wir in  $D$  maximal fortsetzen können.

**Frage:** Was passiert mit dieser Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ , wenn man den Startwert  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  ein wenig verschiebt?

# Das Lemma von Gronwall.

**Satz:** (**Lemma von Gronwall**) Gilt für eine auf  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  stetige Funktion  $r(t)$  eine Abschätzung der Form

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

so gilt für alle  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  die Abschätzung

$$r(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}$$

**Beweis:** Wir definieren für  $t \geq t_0$

$$u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von  $u(t)$  die Beziehung

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t).$$

## Fortsetzung des Beweises.

Aus der Voraussetzung

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

erhalten wir unter Verwendung der Definition von  $u(t)$  gerade

$$e^{-\beta t} r(t) \leq e^{-\beta t} \alpha + \beta u(t)$$

und daher folgt

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\alpha e^{-\beta t} - u'(t) \geq 0$$

und integrieren von  $t_0$  bis  $t$ .

## Fortsetzung des Beweises.

Integration von

$$u'(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

über  $[t_0, t]$  ergibt mit  $u(t_0) = 0$

$$u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} \left( e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t} \right)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} r(t) &\leq \alpha + \beta e^{-\beta t} u(t) \\ &\leq \alpha + \alpha e^{\beta t} \left( e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t} \right) \\ &= \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies ergibt für  $t \geq t_0$  die gewünschte Abschätzung.

Für  $t < t_0$  folgt die Aussage mit einer Transformation durch Spiegelung,

$$\tilde{r}(t) := r(2t_0 - t)$$

# Direkte Folgerung aus dem Gronwall–Lemma.

**Satz:** Für Anfangswerte  $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$  seien die Lösungen  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  und  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)$  auf dem Intervall  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  definiert.

Die Konstante  $L > 0$  sei eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  auf einem Quader  $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$ .

Dann gilt für  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  die Abschätzung

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|$$

**Beweis:** Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0)) d\tau$$

Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir damit die gewünschte Form

$$\underbrace{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(t)} \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + L \cdot \int_{t_0}^t \|\mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{z}_0)\| d\tau$$



# Bemerkungen zum letzten Satz.

## Bemerkungen:

- Der Satz besagt, dass die Lösung einer Anfangswertaufgabe **Lipschitz-stetig** von den Anfangswerten  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  abhängt.
- Für eine lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = Ly(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{mit } L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für  $t \geq t_0$  stets **Gleichheit**:

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0|$$

Für  $t < t_0$  wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt, denn

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0| \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow -\infty$ .

# Eine Verallgemeinerung des letzten Satzes.

**Satz:** Sind  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$  stetig differenzierbar auf einem Quader  $Q$  mit

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y})\| \leq \delta$$

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})\| \leq M$$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq L\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|$$

so gilt für die beiden Lösung  $\mathbf{y}(t)$  und  $\mathbf{z}(t)$  der Anfangswertprobleme

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_0$$

mit  $(t_0, \mathbf{y}_0), (t_1, \mathbf{z}_0) \in Q^0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &\leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| e^{L|t-t_0|} + M|t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{\delta}{L} \left( e^{L|t-t_0|} - 1 \right) \end{aligned}$$

# Anwendung: Parameterabhängige Anfangswertprobleme.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \lambda) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

**Beachte:** Die rechte Seite hängt bei von einem **Parameter**  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  ab.

Dieses Problem kann auf den letzten Fall zurückgeführt werden:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{z}'(t) = 0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \lambda$$

Setzen wir  $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))^T$ , so gilt mit

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{w}(t)) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{w}(t)), 0)^T$$

und  $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{y}_0, \lambda)^T$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (\mathbf{y}_0, \tilde{\lambda})^T$  die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}(t; t_0, \mathbf{w}_0) - \mathbf{w}(t; t_0, \tilde{\mathbf{w}}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot |\lambda - \tilde{\lambda}|$$

# Genauere Beschreibung der Abhängigkeit von $(t_0, \mathbf{y}_0)$ .

**Satz:** Die rechte Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  sei eine  $C^1$ -Funktion auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  sei eine auf einem kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  erklärte Lösung der Differentialgleichung  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ . Dann gilt:

1) Es gibt einen Streifen um  $\bar{\mathbf{y}}(t)$

$$S_\alpha := \{(t, \mathbf{y})^T : t \in I \wedge \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq \alpha\} \subset D \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

so dass die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  des Anfangswertproblems für alle  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in S_\alpha$  auf ganz  $I$  erklärt ist. Zusätzlich ist die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  auf  $I \times S_\alpha$  eine  $C^1$ -Funktion bezüglich aller Variablen.

2) Die so genannten Variationen

$$\mathbf{Y}(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \mathbf{w}(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)$$

# Kapitel 3. Lineare Differentialgleichungen

## 3.1 Systeme erster Ordnung

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

mit den stetigen Funktionen  $\mathbf{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

besitzt eine **eindeutig bestimmte** Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  existiert.

**Satz:** Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{y}_p(t)}_{\text{spez. Lsg. inhomogen}} + \underbrace{\mathbf{y}_h(t)}_{\text{allg. Lsg. homogen}}$$

# Das homogene Differentialgleichungssystem.

Wir betrachten die **homogene** Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  ist ein Element des **Vektorraums**  $\mathbb{R}^n$ .

Es existiert eine **Basisdarstellung** der Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ :

Sei  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  eine **Basis** des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^n \alpha(t) \mathbf{v}^k$$

Mit dem Anfangswert  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  gilt weiterhin

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^n \alpha(t_0) \mathbf{v}^k$$

# Die Fundamentalmatrix.

Betrachten wir die  $n$  Anfangswertprobleme ( $k = 1, \dots, n$ )

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{v}^k \end{cases}$$

und definieren damit die **Fundamentalmatrix** (das **Fundamentalsystem**)

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

so gilt der folgende Satz.

**Satz:** Die Matrix  $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  sei ein Fundamentalsystem. Dann gilt:

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t) \quad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die Fundamentalmatrix ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  regulär.

# Beweis des Satzes.

Da die Vektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  eine Basis bilden, ist die Matrix  $\mathbf{Y}(t_0)$  **regulär**, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}^1(t_0), \dots, \mathbf{y}^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n)$$

Setzen wir

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t),$$

so berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \sum_{k=1}^n c_k \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \left( \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t) \right) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$  eine **Lösung** des Differentialgleichungssystems.



## Fortsetzung des Beweises.

Sei  $\mathbf{y}^*(t)$  eine beliebige Lösung des Differentialgleichungssystems. Setzen wir

$$\mathbf{c}^* := \mathbf{Y}(t_0)^{-1} \mathbf{y}^*(t_0),$$

so sind

$$\mathbf{y}^*(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}^*$$

beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^*(t_0) \end{cases}$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$ . Also gilt

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}^*$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

## Fortsetzung des Beweises.

Wir zeigen nun, dass  $\mathbf{Y}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  regulär ist.

Für ein festes  $t_1 \neq t_0$  zeigen wir

Für alle  $\mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}^n$  gibt es ein  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{Y}(t_1)\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$ ,

denn dann ist  $\mathbf{Y}(t_1)$  regulär.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1 \end{cases}$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}$$

mit einem  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  geschrieben werden kann.

Für  $t = t_1$  gilt dann aber

$$\mathbf{Y}(t_1)\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$$

# Die Wronski–Determinante.

Die  $C^1$ –Funktion

$$W(t) = \det(\mathbf{Y}(t))$$

nennt man die **Wronski–Determinante** zum Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t)$$

Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer skalaren linearen Differentialgleichung

$$W'(t) = \text{Spur}(\mathbf{A}(t)) \cdot W(t)$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(\mathbf{A}(\tau)) d\tau\right)$$

# Das inhomogene Differentialgleichungssystem.

Wir betrachten jetzt die **inhomogene** Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie bei einer skalaren Gleichung eine **Variation der Konstanten**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t) \mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t) \end{aligned}$$

# Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Unser Ansatz  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t)$  löst also die inhomogene Gleichung, falls

$$\mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t)$$

Da  $\mathbf{Y}(t)$  regulär ist, können wir dies auch in der Form  $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t) \mathbf{h}(t)$  schreiben. Durch **Integration** erhält man

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \mathbf{h}(\tau) d\tau$$

**Satz:** Die allgemeine Lösung der **inhomogenen Gleichung** lautet

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \left( \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \mathbf{h}(\tau) d\tau \right)$$

Insbesondere gilt mit  $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1} \mathbf{y}_0$  gerade  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

# Kapitel 3. Lineare Differentialgleichungen

## 3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist dann unabhängig von  $t$  und besitzt **konstante Koeffizienten**.

**Ansatz:** Wir suchen eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{y} \stackrel{!}{=} \mathbf{A} \mathbf{y} = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v}$$

Also ist  $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  genau dann eine Lösung, falls  $\mathbf{v}$  ein **Eigenvektor** von  $\mathbf{A}$  zum **Eigenwert**  $\lambda$  ist, denn

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

# Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten I.

Ist  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v} \end{cases}$$

die Lösung  $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ .

**Fall 1:** Alle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathbf{A}$  sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ .

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

# Komplexwertige Fundamentalsysteme.

**Beispiel:** Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte und -vektoren sind gegeben durch

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \mathbf{v}^1 = (1, -2i)^T$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i, \quad \mathbf{v}^2 = (1, 2i)^T$$

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber die Eigenvektoren und Eigenwerte sind **komplexwertig** und ein **komplexes** Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2)$$

Wir suchen aber **reellwertige** Lösungen!



# Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten II.

**Fall 2:** Die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  ist **diagonalisierbar**.

Dann existiert eine Basis des  $\mathbb{C}^n$  aus (komplexen) Eigenvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ . Die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem für  $\mathbb{C}^n$  ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine **komplexwertige** Lösung des homogenen Systems mit konstanten **reellen** Koeffizienten lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

**Bemerkung:** Jede **normale** und damit jede **symmetrische** Matrix ist diagonalisierbar.

# Komplexe und reellwertige Fundamentalsysteme.

**Frage:** Kann man aus einem komplexen Fundamentalsystem ein reellwertiges Fundamentalsystem konstruieren?

**Idee:** Ist  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein komplexer Eigenwert von  $\mathbf{A}$ , so ist auch der komplex-konjugierte Wert  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert. Dementsprechend ist  $\bar{\mathbf{v}}$  ein Eigenvektor, falls  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor ist.

**Fazit:** Nicht-reelle Eigenwerte und -vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar von Eigenvektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}$$

durch

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re} \left( e^{\lambda t} \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}} \right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im} \left( e^{\lambda t} \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2i} \left( e^{\lambda t} \mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}} \right) \in \mathbb{R}^n$$

# Ein Beispiel zu komplexen/reellen Fundamentalsystemen.

Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2)$$

mit

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \mathbf{v}^1 = (1, -2i)^T$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i, \quad \mathbf{v}^2 = (1, 2i)^T$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{z}^1(t)) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{z}^1(t))$$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine **reelle** Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

# Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten III.

**Fall 3:** Die Systemmatrix **A** ist **nicht** diagonalisierbar

Hier benötigt man die **Jordansche Normalform** einer Matrix:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

wobei  $\mathbf{J}_i$  ein Jordan-Kästchen zum Eigenwert  $\lambda_i$  bezeichnet

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

# Fundamentalsysteme für Jordan-Kästchen.

Ein System in der Form eines **Jordan-Kästchens**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda_1 & \\ 0 & & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

kann unter Verwendung der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$  explizit gelöst werden

$$e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Fundamentalsysteme für nicht–diagonalisierbare Matrizen.

Betrachten wir die **Jordansche Normalform** der Systemmatrix **A**

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

so besteht die **Transformationsmatrix S** aus Eigen– und Hauptvektoren

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}^{11}, \dots, \mathbf{v}^{1r_1} \mid \mathbf{v}^{21}, \dots, \mathbf{v}^{2r_2} \mid \dots \mid \mathbf{v}^{m1}, \dots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

$\mathbf{v}^{j1}$  : Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$

$\mathbf{v}^{jk}$  : Hauptvektor der Stufe  $(k - 1)$ ,  $k = 2, \dots, r_j$

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n) \mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1}, k = 2, \dots, r_j$$

Wir setzen nun  $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$ . Dann gilt

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z}(t) \Rightarrow \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{z}(t)$$

Ein Fundamentalsystem für  $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\mathbf{z}$  haben wir bereits berechnet.

# Fundamentalsysteme für nicht–diagonalisierbare Matrizen.

Eine Rücktransformation ergibt ein Fundamentalsystem für  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ .

Für ein einzelnes Jordan–Kästchen ergibt sich:

$$\mathbf{y}^{11}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{11}$$

$$\mathbf{y}^{12}(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t}{1!} \mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12} \right)$$

$\vdots$

$$\mathbf{y}^{1r}(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \mathbf{v}^{11} + \dots + \frac{t}{1!} \mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r} \right)$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:

- 1 Bestimmung der Eigenwerte, Eigen– und Hauptvektoren,
- 2 Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
- 3 Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.



# Ein Beispiel für nicht-diagonalisierbare Matrizen.

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ergibt  $\lambda = 1$  als dreifacher Eigenwert:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = (1 - \lambda)^3$$

Wir berechnen einen Eigenvektor für  $\lambda = 1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da  $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 2$  gilt, ist die **geometrische Vielfachheit**  $g(\lambda) = 1$ .

## Fortsetzung des Beispiels.

Wir benötigen **Hauptvektoren der Stufe 1 und 2**:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t + 1 \\ 8t + 2 \end{pmatrix}$$

# Ein zweites Beispiel für nicht-diagonalisierbare Matrizen.

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist  $\lambda = 1$  dreifacher Eigenwert von  $\mathbf{A}$ , aber es gilt  $g(\lambda) = 2$ .

Es existieren also **zwei** linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)^2 = \mathbf{0}$$

Wir suchen daher einen zu  $\mathbf{v}^1$  und  $\mathbf{v}^2$  linear unabhängigen Vektor  $\mathbf{v}^{22}$  (Hauptvektor der Stufe 1).

## Fortsetzung des Beispiels.

Wählen wir  $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^T$ , so folgt  $\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)\mathbf{v}^{22} = (1, 1, 0)^T$ .

Damit erhalten wir ein System von Eigen- und Hauptvektoren in der Form

$$\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die **Jordansche Normalform** von  $\mathbf{A}$  ist

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Das zugehöriges Fundamentalsystem lautet dann

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Kapitel 3. Lineare Differentialgleichungen

## 3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine **skalare, lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**:

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei  $a_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  sind.

Eine solche Gleichung läßt sich als ein **System erster Ordnung** schreiben:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

# Die homogene Differentialgleichung höherer Ordnung.

**Definition:** Ein Funktionensystem  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$  heißt **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = h(t),$$

falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Funktionen  $y_k(t)$  lösen die homogene Gleichung, d.h.

$$L[y_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

- Die **Wronski-Determinante**

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ist für mindestens ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  ungleich Null,  $W(t_0) \neq 0$ .

## Bemerkungen.

- Ist  $W(t_0) \neq 0$ , so gilt auch  $W(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Weiter löst  $W(t)$  die Differentialgleichung  $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$ , und daher gilt

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(\tau) d\tau\right)$$

- Ein Fundamentalsystem  $(y_1, \dots, y_n)$  läßt sich durch Lösung von  $n$  Anfangswertaufgaben ( $k = 1, \dots, n$ ) bestimmen:

$$L[y_k] = 0$$

$$y_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 0 & : i \neq k-1 \\ 1 & : i = k-1 \end{cases} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^n c_k y_k(t),$$

wobei  $y_p(t)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

# Das Reduktionsverfahren.

Sei  $u(t) \neq 0$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $L[y] = 0$ .

## Produktansatz:

Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung in der Form

$$y(t) = u(t) \cdot z(t)$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$y'(t) = u'(t)z(t) + u(t)z'(t)$$

$$y''(t) = u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t)$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t)$$



# Fortsetzung des Reduktionsverfahrens.

Einsetzen in  $L[y] = 0$  ergibt:

$$\begin{aligned}L[y] &= \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\&= \underbrace{\left[ \sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{0} u^{(k)}(t) \right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\&= \sum_{j=1}^n b_j z^{(j)}(t)\end{aligned}$$

Setzt man  $w(t) := z'(t)$ , so ergibt sich eine homogene Differentialgleichung der Ordnung  $n - 1$ :

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0$$

## Fortsetzung des Reduktionsverfahrens.

Ist  $w_1, \dots, w_{n-1}$  ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0$$

so setzen wir

$$z_k(t) = \int_{t_0}^t w_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, z_1 \cdot u, \dots, z_{n-1} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem das Ausgangsgleichung, also  $L[y] = 0$  mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0$$

## Ein Beispiel zum Reduktionsverfahren.

Die Differentialgleichung  $y'' + ty' + y = 0$  besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Unser Ansatz  $y = u \cdot z$  liefert:

$$y' = u' \cdot z + u \cdot z'$$

$$y'' = u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z''$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}y'' + ty' + y &= u''z + 2u'z' + uz'' + t(u'z + uz') + uz \\ &= 2u'z' + uz'' + tuz'\end{aligned}$$

Wir setzen  $w = z'$  und erhalten für  $w$  die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u} w$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Wir berechnen:

$$\frac{2u' + tu}{u} = \frac{-2te^{-t^2/2} + te^{-t^2/2}}{e^{-t^2/2}} \Rightarrow w' = tw$$

Damit gilt:

$$w(t) = e^{t^2/2} \Rightarrow z(t) = \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Wir erhalten damit das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = u(t) = e^{-t^2/2} \quad y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

# Die inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung.

Ist das Funktionensystem  $(y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung. Die Methode der **Variation der Konstanten** ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

# Die Methode der Greenschen Funktion (Grundlösungsverfahren).

Gegeben sei die inhomogene Gleichung mit **konstanten Koeffizienten**

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = h(t)$$

**Satz:** Sei  $w(t)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : k = 0, \dots, n-2 \\ 1 & : k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung  $y_p(t)$  der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + t_0) \quad (\text{Greensche Funktion})$$

# Lineare Gleichungen $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Gegeben sei die homogene Gleichung

$$L[y] := a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = h(t)$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  und  $a_n = 1$ . Zur Berechnung eines Fundamentalsystems machen wir den **Ansatz**

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

Unser Ansatz liefert eine Lösung, falls  $\lambda$  eine Nullstelle der so genannten **charakteristischen Gleichung** ist:

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

# Die charakteristische Gleichung und Fundamentalsysteme.

## Satz:

- 1) Ist  $\lambda_k$  eine  $r_k$ -fache **reelle** Nullstelle von  $p(\lambda)$ , so existieren die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung

$$y_{k1}(t) = e^{\lambda_k t}$$

$$y_{k2}(t) = t \cdot e^{\lambda_k t}$$

$$\vdots$$

$$y_{k,r_k}(t) = t^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k t}$$

- 2) Ist  $\lambda_k$  eine  $r_k$ -fache **komplexe** Nullstelle,  $\lambda_k \notin \mathbb{R}$ , so sind die reellen Lösungen mit  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \quad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und  $j = 1, \dots, r_k$ .

- 3) Die Lösungen aus 1) und 2) bilden ein Fundamentalsystem von  $L[y] = 0$ .



# Beispiele.

- Gegeben sei die homogene Gleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

und besitzt die Nullstellen  $\lambda_{1,2} = i$ ,  $\lambda_{3,4} = -i$ .

Ein Fundamentalsystem ist daher

$$y_1(t) = \cos t \quad y_3(t) = t \cdot \cos t$$

$$y_2(t) = \sin t \quad y_4(t) = t \cdot \sin t$$

- Die homogene Gleichung  $y'' - 2y' + y = 0$  besitzt die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  mit der doppelten Nullstelle  $\lambda = 1$ .

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

# Ein Beispiel für eine inhomogene Gleichung.

Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

Bei der **Variation der Konstanten** verwenden wir den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

Gelöst werden muss dann das DGL-System

$$c_1'e^t + c_2'te^t = 0$$

$$c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t = \frac{e^t}{t^2}$$

Man berechnet direkt

$$c_1(t) = -\ln|t| \quad c_2 = -\frac{1}{t}$$

und eine spezielle Lösung ist daher

$$y_p(t) = -\left(\ln|t| + 1\right)e^t$$

## Noch einmal das Beispiel.

Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

und verwenden die **Methode der Greenschen Funktion**:

Die Lösung von

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch  $w(t) = (t - 1)e^{t-1}$ . Also gilt für die Greensche Funktion

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t (t - \tau)e^{t-\tau} \frac{e^\tau}{\tau^2} d\tau \\ &= e^t(-1 + t - \ln |t|) \end{aligned}$$

# Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität.

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von  $y_p(t)$  verwenden:

- Ist  $\mu$  keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung  $p(\lambda)$ , so ist eine **spezielle Lösung** mit den freien Parametern  $\gamma_j$

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j$$

- Ist  $\mu$  eine  $r$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$ , so ist eine **spezielle Lösung**

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j$$

## Ein Beispiel mit spezieller Inhomogenität.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - y = te^t$$

Die charakteristische Gleichung ist  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$  und  $\mu = 1$  ist eine einfache Nullstelle.

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren liefert

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt  $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$  und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t - 1)e^t$$

# Das Superpositionsprinzip und komplexe Differentialgleichungen.

**Superpositionsprinzip** Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

$$L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (2)$$

Sind  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  spezielle Lösungen von  $L[y] = h_1(t)$  und  $L[y] = h_2(t)$ , so ist  $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$  eine spezielle Lösung von (2).

## Komplexe Differentialgleichungen

Ist  $h(t)$  der Real- oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion  $w(t)$ ,

$$h(t) = \operatorname{Re}(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \operatorname{Im}(w(t))$$

und ist  $z(t)$  eine **komplexe** Lösung von  $L[z] = w$ , so ist

$$y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \operatorname{Im}(z(t))$$

eine **reelle** Lösung der Differentialgleichung  $L[y] = h(t)$ .

# Beispiel zum Superpositionsprinzip und komplexer Differentialgleichung.

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} (\cos t + \sin(2t))$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t} \left( \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{4} t \cos(2t) \right)$$

- Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cos t$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin(2t)$$

- Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+i)t} \quad \text{bzw.} \quad e^{(-1+2i)t}$$

# Kapitel 3. Lineare Differentialgleichungen

## 3.4 Die Laplace–Transformation

Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reell– oder komplexwertige Funktion auf  $\mathbb{R}$ . Die **Laplace–Transformierten** von  $F$  ist gegeben durch die Integraltransformation

$$f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (3)$$

wobei  $s \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl ist.

**Frage:** Für welche Funktionen  $F(t)$  existiert das uneigentliche Integral?  
Schreiben wir die komplexe Zahl  $s$  als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right) F(t) dt$$



## Antwort: Wachstumsverhalten von $F(t)$ ist entscheidend.

**Satz:** Ist  $F$  auf  $[0, \infty)$  lokal integrierbar und erfüllt  $F$  mit gewissen Konstanten  $M$  und  $\sigma_0$  eine Ungleichung der Form

$$|F(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

so existiert die **Laplace-Transformierte** für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

**Beweisidee:** Setzen wir  $s = \sigma + i\omega$ , so gilt

$$|e^{-st}F(t)| = e^{-\sigma t}|F(t)| \leq Me^{-(\sigma - \sigma_0)t}$$

Aus  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$  folgt also

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \quad \text{für alle } t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

# Notationen und Bezeichnungen.

Sei  $F(t)$  eine reell- oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace-Transformierte  $f(s)$  existiert.

- 1 Wir schreiben auch  $f = \mathcal{L}[F]$
- 2 Das **Doetsch-Symbol** lautet  $\circ \longrightarrow \bullet$ :

$$F \circ \longrightarrow \bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet \longleftarrow \circ F$$

- 3 Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ \longrightarrow \bullet f$$

nennt man eine **Korrespondenz**, die Zuordnung  $F \longrightarrow f$  heißt **Laplace-Transformation**.

- 4 Die Laplace-Transformation ist **linear**, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G]$$

# Beispiel zur Laplace-Transformation.

Wir betrachten die **Heaviside-Funktion**

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace-Transformierte lautet

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Dies ergibt die **Korrespondenz**

$$1 \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s}$$

# Beispiel zur Laplace-Transformation.

Die Laplace-Transformierte von

$$F(t) = t^n \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

Das Integral existiert für  $\operatorname{Re}(s) > 0$  und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration ergibt die

**Korrespondenz**

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

# Beispiel zur Laplace-Transformation.

Gegeben sei die komplexe Funktion

$$F(t) = e^{at} \quad \text{mit } a = \alpha + i\beta.$$

Für die Laplace-Transformierte ergibt sich

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

für  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) = \alpha$ .

Damit erhalten wir die **Korrespondenz**

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

# Beispiel zur Laplace-Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$$

Wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$$

erhalten wir die **Korrespondenz**

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \circ \bullet \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right)$$

# Beispiel zur Laplace-Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

Wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$$

erhalten wir die **Korrespondenz**

$$\cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right)$$

# Korrespondenztabelle.

$F(t)$	$f(s)$	$\sigma_0$	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \dots$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$\operatorname{Re}(a)$	$a$ komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	0	$\omega_0$ reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	0	$\omega_0$ reell



# Grundregeln der Laplace-Transformation.

- ① **Additionssatz:** Für beliebige komplexe Konstanten  $a$  und  $b$  gilt

$$aF(t) + bG(t) \circ \bullet af(s) + bg(s)$$

- ② **Ähnlichkeitssatz:** Für jede reelle Konstante  $\alpha > 0$  gilt

$$F(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

**Beispiel:** Aus

$$e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ \bullet \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} - 1} = \frac{1}{s - \alpha}$$

# Grundregeln der Laplace–Transformation.

- ③ **Differentiationssatz:**  $F$  sei für  $t > 0$  differenzierbar und es existiere die Laplace–Transformierte von  $F'$ . Dann gilt

$$F'(t) \circ \longrightarrow \bullet sf(s) - F(0)$$

Besitzt  $F$  im Ursprung eine Unstetigkeitsstelle, so ist  $F(0)$  der rechtsseitige Grenzwert

$$F(0) := \lim_{t \searrow 0} F(t)$$

Allgemein gilt für höhere Ableitungen ( $n \geq 2$ ) die Formel

$$F^{(n)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$$

- ④ **Multiplikationssatz:** Es gilt

$$-tF(t) \circ \longrightarrow \bullet f'(s) \quad \text{bzw.} \quad tF(t) \circ \longrightarrow \bullet -f'(s)$$

und allgemein

$$(-t)^n F(t) \circ \longrightarrow \bullet f^{(n)}(s) \quad \text{bzw.} \quad t^n F(t) \circ \longrightarrow \bullet (-1)^n f^{(n)}(s)$$

# Grundregeln der Laplace-Transformation.

- 5 **Integrationsatz:** Es gilt

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \circ \longrightarrow \bullet \frac{f(s)}{s}$$

- 6 **Divisionssatz:** Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten  $\sigma_0$ , und es existiere die Laplace-Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}$$

Dann gilt für  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ \longrightarrow \bullet \int_s^\infty f(u) du$$

# Grundregeln der Laplace-Transformation.

- ⑦ **Verschiebungssatz:** Für alle  $T_0 > 0$  gilt

$$F(t - T_0) \circ \bullet e^{-sT_0} f(s)$$

- ⑧ **Dämpfungssatz:** Für ein beliebiges komplexes  $a$  gilt:

$$e^{at} F(t) \circ \bullet f(s - a)$$

**Beispiel:** Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$$

# Laplace-Transformation und Differentialgleichungen.

Nach dem Differentiationssatz gilt

$$F'(t) \circ \bullet sf(s) - F(0)$$

**Idee:** Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$Y'(t) = Y(t), \quad Y(0) = 1$$

Für die Laplace-Transformierte  $y(s)$  von  $Y(t)$  ergibt sich dann

$$sy(s) - 1 = y(s) \Rightarrow y(s) = \frac{1}{s-1}$$

und aus der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$Y(t) = e^t$$

**Resultat:** Lineare Differentialgleichungen ergeben **algebraische Gleichungen** für die Laplace-Transformierte.

## Beispiel.

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems ( $\alpha > 0$ )

$$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t)$$

mit  $Y(0) = Y'(0) = 0$ .

Nach der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

und es gilt

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$$

Man könnte nun mit einer [Partialbruchzerlegung](#) weitermachen.

Wir verwenden hier die Beziehung

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$F(t) \circ \bullet \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} = f(s)$$

und dem **Multiplikationssatz**

$$tF(t) \circ \bullet -f'(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2} = 2s y(s) = -\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

folgt

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ t \sin(\alpha t)$$

Anwendung des **Integrationssatzes** liefert dann die Beziehung

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ \int_0^t \tau \sin(\alpha \tau) d\tau = \frac{1}{\alpha^2} \left( -\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t) \right)$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{2}{\alpha^2} \left( -\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t) \right)$$

## Ein zweites Beispiel.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$Y'' + Y' + 4Z = \sin(\omega t)$$

$$Y' + Z' + Z = 0$$

mit den Anfangsbedingungen  $Y(0) = -\frac{1}{3}$ ,  $Y'(0) = 0$  und  $Z(0) = 0$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) = 0$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$s(s+1)y(s) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s+1}{3}$$

$$sy(s) + (s+1)z(s) = -\frac{1}{3}$$



## Fortsetzung des Beispiels.

Die Funktionen  $(y(s), z(s))$  erfüllen ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix}$$

und die Lösung lautet

$$y(s) = \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2 + \omega^2)}{3(s^2 + \omega^2)s[(s+1)^2 - 4]}$$

$$z(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)[(s+1)^2 - 4]}$$

Die nächsten Schritte:

- 1 Partialbruchzerlegung
- 2 Rücktransformation aus der Korrespondenztabelle

# Komplettierung des Beispiels.

Nach längeren Umformungen ergibt sich

$$y(s) = -\frac{\omega^2 - 3}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) - \frac{\omega^2 + 5}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ + \frac{\omega}{2(\omega^2 + 1)} e^t - \frac{\omega}{6(\omega^2 + 9)} e^{-3t} - \frac{\omega + 1}{3\omega}$$

$$z(s) = \frac{2\omega}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) + \frac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ - \frac{\omega}{4(\omega^2 + 1)} e^t + \frac{\omega}{4(\omega^2 + 9)} e^{-3t}$$

**Fazit:** komplizierte Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

# Kapitel 3. Lineare Differentialgleichungen

## 3.5 Stabilität

Gegeben sei eine **Differentialgleichung erster Ordnung**

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ . Weiterhin sei  $\mathbf{y}^*(t)$  eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

**Frage:** Wie verhalten sich **benachbarte Lösungen**  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ?

**Beispiel:** Wir betrachten die beiden Anfangswertaufgaben

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

In beiden Fällen ist die Lösung  $y^*(t) = 0$ . Die Lösungen  $y(t; 0, y_0)$  mit einer Anfangsbedingung  $y_0 \neq 0$  sind aber gegeben durch

$$y_1(t) = y_0 e^t \rightarrow \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad y_2(t) = y_0 e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty$$

# Stabilität von Lösungen.

## Definition:

- a) Die Lösung  $\mathbf{y}^*(t)$  heißt **stabil** auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , falls es zu  $t_0 \in I$  und  $\varepsilon > 0$  stets ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $\mathbf{y}_0$  mit  $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$  gilt

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I$$

Kann man  $\delta$  unabhängig von  $t_0$  wählen, so nennt man  $\mathbf{y}^*(t)$  **gleichmäßig stabil** auf  $I$ .

- b) Ist die Lösung  $\mathbf{y}^*(t)$  auf einem Intervall  $[a, \infty)$  erklärt, so heißt  $\mathbf{y}^*(t)$  dort **asymptotisch stabil**, falls  $\mathbf{y}^*(t)$  dort stabil ist, und es zu  $t_0 \geq a$  stets ein  $\delta(t_0) > 0$  gibt, sodass für alle  $\mathbf{y}_0$  mit  $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0$$

Die Lösung  $\mathbf{y}^*(t)$  heißt **strikt stabil**, falls  $\mathbf{y}^*(t)$  gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

# Stabilitätsuntersuchung der Nulllösung reicht aus.

**Bemerkung:** Sei  $\mathbf{y}^*(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

so erfüllt  $\mathbf{z}(t)$  die **Differentialgleichung**

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig sieht man sofort, dass  $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$  eine Lösung von

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

ist.

Statt der Stabilität von  $\mathbf{y}^*(t)$  können wir also – **äquivalent dazu** – die Stabilität der **Nulllösung** von  $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$  untersuchen.

# Stabilitätssatz I bei linearen Differentialgleichungen.

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \quad \text{mit } a \leq t < \infty$$

und stetiger Matrix  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei  $\mathbf{Y}(t)$  ein beliebiges Fundamentalsystem.

**Satz:** (Stabilitätssatz I)

- 1) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann stabil auf dem Intervall  $[a, \infty)$ , falls das Fundamentalsystem  $\mathbf{Y}(t)$  auf  $I$  beschränkt ist.
- 2) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann gleichmäßig stabil auf  $I$ , falls es eine Konstante  $M > 0$  gibt, sodass für alle  $t \geq t_0 \geq a$  gilt

$$\|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M$$

- 3) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

# Ein weiteres Stabilitätskriterium.

**Satz:** Sei  $\lambda(t)$  der **größte Eigenwert** der Matrix  $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$ . Ist die Beziehung

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty$$

erfüllt, so folgt für jede Lösung  $\mathbf{y}(t)$  der **Differentialgleichung**  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0,$$

d.h.  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{y} \\ &\leq \lambda(t) (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = \lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau\right)$$

# Stabilitätssatz II bei linearen Differentialgleichungen.

**Satz: (Stabilitätssatz II)** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  mit der konstanten Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Nulllösung  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ist genau dann

- 1) **strikt stabil**, falls für alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  gilt:  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ .
- 2) **gleichmäßig stabil**, falls für alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

- 3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{0}$  **instabil**.

**Beispiel:** Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil, denn die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = -4$  und  $\lambda_2 = 0$  (**doppelter Eigenwert**), aber  $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$ .



# Ein Beispiel zum Stabilitätssatz II.

- ① Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ② Der **eindeutige** Gleichgewichtspunkt ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist gegeben durch  $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$ .

- ③ Die Transformation  $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$  liefert das homogene System

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

- ④ Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  lauten  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$  und damit ist  $\mathbf{y}^*$  strikt stabil.

# Das Kriterium von Routh und Hurwitz.

**Satz:** (Kriterium von Routh und Hurwitz) Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{mit } a_n > 0.$$

Dann sind äquivalent:

- 1) Alle Nullstellen von  $p(z)$  haben negativen Realteil.
- 2) Es gilt  $a_k > 0$  für alle  $k = 0, 1, \dots, n$ , und alle Hauptunterdeterminanten der  $(n, n)$ -Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

sind positiv. Dabei setzen wir  $a_k = 0$  für alle  $k > n$ .

# Ein Beispiel zum Kriterium von Routh und Hurwitz.

Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die Matrix  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminanten sind  $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$  sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{und} \quad \det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von  $p(z)$  einen negativen Realteil.

# Qualitatives Verhalten für ebene konstante Systeme.

Wir betrachten das homogene ebene System mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Weiterhin seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigen- und Hauptvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$ .

Mit  $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  und

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 = \lambda_2, g(\lambda_2) = 2 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ und } g(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

erhalten wir für  $\mathbf{w}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$  die Differentialgleichung  $\mathbf{w}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{w}(t)$ .

In der  $(w_1, w_2)$ -Phasenebene ergibt sich dann qualitativ das folgende Stabilitätsverhalten: [Fortsetzung auf Folie.](#)

# Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

wobei  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  gelte, d.h.  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels **Linearisierung** der rechten Seite

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Folgt aus **Taylor-Entwicklung** der rechten Seite um den Entwicklungspunkt  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

# Stabilitätssatz III für nichtlineare Gleichungen.

**Satz:** (**Stabilitätssatz III**) Mit den obigen Voraussetzungen gilt.

1) Gilt für alle Eigenwerte  $\lambda_j$  von  $\mathbf{A} = \mathbf{Jf}(\mathbf{0})$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ein **strikt stabiler Gleichgewichtspunkt** von  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert  $\lambda_j$  von  $\mathbf{A}$  mit

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  **instabil**, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls auf das nichtlineare Problem.

# Wichtige Bemerkung zur Linearisierung.

**Bemerkung:** Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

- 1 für alle Eigenwerte  $\lambda$  von **A**

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0,$$

gilt

- 2 **und** mindestens ein Eigenwert  $\lambda$  mit

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

existiert.

Insbesondere spielt es bei Eigenwerten  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  **keine Rolle**, wie es sich mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit verhält.

**Und:** Gerade mechanische Systeme, die ungedämpfte Schwingungen beschreiben, besitzen rein imaginäre Eigenwerte.

# Beispiel: Das mathematische Pendel.

Das **mathematische Pendel** wird beschrieben durch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi$$

Dabei bezeichnet  $\Phi = \Phi(t)$  den **Auslenkungswinkel** zur Zeit  $t$ ,  $l$  die **Länge** des Pendels und  $g$  die **Gravitationskonstante**.

Mittels der Substitution

$$y_1 := \Phi \quad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das **Differentialgleichungssystem erster Ordnung**

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega^2 \sin y_1$$

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite,

$$y_{1k} = k\pi \quad \text{und} \quad y_{2k} = 0 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



## Beispiel: Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt

$$\mathbf{y}_k = (y_{1k}, y_{2k})^T = (k\pi, 0)^T, k \in \mathbb{Z}.$$

Wir **linearisieren** um den Gleichgewichtspunkt  $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(y_1, y_2) &= \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=0} + \mathbf{J}\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\ &= \mathbf{J}\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \end{aligned}$$

# Stabilität des linearisierten mathematischen Pendels.

Die Linearisierung ergibt sich das **lineare System**

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi)$$

Wir berechnen die Eigenwerte der (konstanten) Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k$$

Für die Eigenwerte folgt daraus

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \text{ falls } k \text{ gerade} \\ \pm \omega & : \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

# Stabilität mittels Ljapunov-Funktionen.

Wir betrachten wieder das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

**Definition:** Eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt **Ljapunov-Funktion** auf  $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$  für  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ , falls gilt

a)

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

b)

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$$

Gilt in b) sogar

b')

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so nennt man  $V(\mathbf{y})$  eine **strenge Ljapunov-Funktion**.

# Stabilitätssatz IV mit Ljapunov-Funktionen.

**Satz:** (Stabilitätssatz IV)

- 1) Existiert eine Ljapunov-Funktion  $V(\mathbf{y})$  von  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ , so ist die Nulllösung  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ein **gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt**.
- 2) Ist  $V(\mathbf{y})$  zudem eine strenge Ljapunov-Funktion von  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ , so ist die Nulllösung  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

**Beweisidee:** Wir berechnen die Zeitableitung der Funktion  $V(\mathbf{y}(t))$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) &= \text{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{y}'(t) \\ &= \text{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle\end{aligned}$$

Ist  $V$  eine (**strenge**) Ljapunov-Funktion, so ist  $V = V(\mathbf{y}(t))$  (**strenge**) monoton fallend.

# Instabilität und Ljapunov-Funktionen.

**Bemerkung:** Wir betrachten wieder die autonome Gleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

d.h. die Nulllösung  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ist ein Gleichgewichtspunkt.

Existiert eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $V(\mathbf{y})$  mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

und

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so ist  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  ein **instabiler** Gleichgewichtspunkt.

# Ein Beispiel zu Ljapunov-Funktionen.

Wir betrachten das nichtlineare System

$$\dot{x} = -x^3 + y$$

$$\dot{y} = -x - y^5$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Mit dem Ansatz

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, a, b > 0$$

gilt offensichtlich

$$V(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad V(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x, y), \mathbf{f}(x, y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\ &= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6\end{aligned}$$

Setzt man  $a = b > 0$ , so folgt

$$V(x, y) = -2ax^4 - 2by^6$$

d.h.  $V$  ist eine **strenge Ljapunov-Funktion** und der Nullpunkt ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

# Ljapunov-Funktion für das mathematische Pendel.

Beim mathematischen Pendel

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega^2 \sin y_1$$

setzt man

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2}y_2^2 + \omega^2(1 - \cos y_1)$$

Damit gilt  $V(0,0) = 0$  und  $V(y_1, y_2) > 0$  für  $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$ ,  $r < \pi$ . Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Also ist  $V$  eine Ljapunov-Funktion auf  $\bar{K}_r(\mathbf{0})$  und der Nullpunkt ist ein **stabiler Gleichgewichtspunkt**. Allerdings ist  $V$  **keine** strenge Ljapunov-Funktion, denn der Ursprung ist auch **nicht** asymptotisch stabil.



# Kapitel 4. Randwertaufgaben

## 4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  hinreichend oft stetig differenzierbar.

**Anfangswertaufgabe:** Gebe Lösung zur Zeit  $t = a$  vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

**Randwertaufgabe:** Zur Festlegung einer Lösung  $\mathbf{y}(t)$  werden nicht alle Komponenten  $y_i$  an einer Stelle vorgegeben wie oben, sondern

**gewisse** Komponenten  $y_i$  an **verschiedenen** Stellen  $t = a, b, c, \dots$

# Typische Beispiele zu Randwertaufgaben.

## 1 Sturmsche Randwertaufgaben

$$\begin{cases} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = h(t) \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = d_1 \\ \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = d_2 \end{cases}$$

## 2 Lineare Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{d} \end{cases}$$

## 3 Allgemeine Zweipunkt-Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases}$$

# Randwerte entscheiden über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

**Beispiel:** Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben durch

$$y'' + y = 0.$$

- ① Die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die **eindeutig bestimmte** Lösung  $y(t) = \sin t$ .

- ② **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 1$$

- ③ Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen  $y(t) = c \sin t$  mit einem beliebigen  $c \in \mathbb{R}$ .

# Existenzsatz für lineare Randwertaufgaben.

**Satz:** Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{d} \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen  $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t), t \in \mathbb{R}$ . Weiterhin sei  $\mathbf{Y}(t)$  ein beliebiges Fundamentalsystem zu  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ . Dann sind die folgenden Aussagen **äquivalent**:

- 1) Die Randwertaufgabe ist für **alle stetigen** Inhomogenitäten  $\mathbf{h}(t)$  und Randwerte  $\mathbf{d}$  stets **eindeutig lösbar**.
- 2) Die zugehörige Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{0} \end{cases}$$

hat nur die **triviale** Lösung  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ .

- 3) Die Matrix

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist **regulär**.

Jens Struckmeier (Mathematik, UniHH)

Differentialgleichungen I für Ingenieure

148 / 200

# Unser Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ .

Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{E}$  ist demnach **regulär** für  $b = \pi/2$  und **singulär** für  $b = \pi$ .

## 4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

**Problem der Brachistochrone** (Johann Bernoulli, 1696):

Man bestimme eine differenzierbare Funktion  $y = y(t)$  mit Randbedingungen  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$ , sodass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} dt$$

minimal wird.

**Interpretation:** Das angegebene Funktional  $I[y]$  beschreibt – bis auf einen Vorfaktor – die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve  $y = y(t)$  von Punkt  $A = (a, y_a)$  zum Punkt  $B = (b, y_b)$  zu kommen.

# Allgemeine Formulierung einer Variationsaufgabe.

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die die vorgegebenen Randbedingungen

$$y(a) = y_a \quad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

minimiert.

**Ziel:** Wir suchen eine Randwertaufgabe, die zu der oben formulierten Variationsaufgabe äquivalent ist.

# Zur Lösung des Variationsproblems (Lagrange, 1755).

Sei  $y_0(t)$  die Lösung des **allgemeinen Variationsproblems** und  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine **beliebige** differenzierbare Funktion mit

$$h(a) = h(b) = 0$$

Setzen wir  $y(t, \varepsilon)$  als

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t),$$

so besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[y(\cdot, \varepsilon)] = I[y_0 + \varepsilon h]$$

im Punkt  $\varepsilon = 0$  ein **Minimum**, denn  $y_0(t)$  löst das allgemeine Variationsproblem.

Da  $J(\varepsilon)$  eine skalare Funktion der reellen Variablen  $\varepsilon$  ist, gilt als notwendige Bedingung für einen (lokalen) Extremwert (nach **Analysis I**)

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$



# Die erste Variation $\delta I$ .

**Definition:** Der Ausdruck  $\delta I$  definiert durch

$$\delta I := \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0}$$

heißt die **1. Variation** des Funktionals  $I[y]$ .

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss  $\delta I = 0$  gelten.

**Bemerkung:**

- Die Funktion

$$\delta y(t) := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

nennt man auch die **1. Variation** der abhängigen Variablen.

- Die erste Variation  $\delta I$  entspricht der Richtungsableitung von  $I[y]$  in Richtung  $h$  an der Stelle  $y_0$ .

# Berechnung der ersten Variation

Die 1. Variation berechnet man wie folgt.

$$\begin{aligned}\delta I &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y_0' + \varepsilon h') dt \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t)}_{=0} \Big|_a^b \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt\end{aligned}$$

# Das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Wir erhalten also aus Bedingung  $\delta I = 0$ :

$$\int_a^b \left( f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right) \cdot h(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da  $h(t)$  beliebig ist, folgt das **Fundamentallemma der Variationsrechnung**

$$f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0 \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

**Satz:** Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe

$$f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0$$

$$y_0(a) = y_a \quad y_0(b) = y_b$$

Die Differentialgleichung nennt man die **Euler–Lagrange–Gleichung**.

# Explizite Form der Euler–Lagrange–Gleichung.

Wegen

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = f_{y't}(t, y_0, y'_0) + f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0 + f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \cdot y''_0$$

läßt sich die Euler–Lagrange Gleichung unter der **Regularitätsbedingung**

$$f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \neq 0$$

nach  $y''_0$  auflösen und damit in der expliziten Form

$$y''_0 = \frac{f_y(t, y_0, y'_0) - f_{y't}(t, y_0, y'_0) - f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0}{f_{y'y'}(t, y_0, y'_0)}$$

schreiben.

**Bemerkung:** Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

- die Funktion  $f$  ist unabhängig von  $y$ , d.h.  $f = f(t, y')$ ,
- die Funktion  $f$  hängt nicht explizit von  $t$  ab, d.h.  $f = f(y, y')$ .

# Zwei Spezialfälle der Euler–Lagrange Gleichung

- ① Hängt  $f$  nicht von  $y$  ab,  $f = f(t, y')$  so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0.$$

Dies bedeutet aber für alle  $a \leq t \leq b$

$$f_{y'}(t, y_0, y'_0) = \text{const.}$$

- ② Hängt  $f$  nicht explizit von  $t$  ab, so gilt für alle  $a \leq t \leq b$

$$H := f - f_{y'} y' = \text{const.}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt} (f - f_{y'} y') = f_y y' + f_{y'} y'' - \left( \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' - f_{y'} y'' \\ &= \left( f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' = 0 \end{aligned}$$

# Beispiel: Das Problem der Brachistochrone.

Gesucht ist eine  $C^1$ -Funktion  $y(t)$ , die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \quad \text{und} \quad y(b) = y_b$$

minimiert.

Der Integrand von  $I[y]$  hängt nicht explizit von  $t$  ab, wir bestimmen daher die **Hamilton-Funktion**:

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'} y' \\ &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \end{aligned}$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Für die **Hamilton-Funktion** gilt

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a - y(t)}} = c_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{2c - (y_a - y)}{y_a - y}} \quad \text{mit } 2c = \frac{1}{c_1^2} > 0$$

Eine Trennung der Variablen ergibt dann die implizite Darstellung

$$\int_{y_a}^y \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2c - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a,$$

eine **Zykloide** (siehe Band 1, Beispiel 14.2.2).

## 4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t)$$

$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1$$

$$R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \quad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

**Beobachtung:** Das Problem läßt sich stets auf ein [Problem mit homogenen Randbedingungen](#) zurückführen.



# Rückführung auf homogene Randbedingungen.

Sei  $y_0(t)$  eine  $C^2$ -Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \quad \text{und} \quad R_2[y_0] = d_2$$

d.h.  $y_0(t)$  erfüllt die gegebenen Randbedingungen.

Wir setzen dann

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

## Folgerung:

Löst  $y(t)$  das Problem

$$L[y] = h(t), \quad R_1[y] = d_1, \quad R_2[y] = d_2,$$

so löst  $z(t)$  das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \quad R_1[z] = 0, \quad R_2[z] = 0$$

# Die Greensche Funktion bei Randwertaufgaben.

- 1 Randwertaufgaben 2. Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich stets mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen.

- 2 Dabei erhält man die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

mit der **Greensche Funktion**  $G(t, \tau)$  und  $a \leq t, \tau \leq b$ .

- 3 **Entscheidender Vorteil:** Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator  $L[y]$  ab, aber **nicht** von der Inhomogenität  $h(t)$ .
- 4 Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator  $L[y]$  bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.

# Zur Konstruktion der Greenschen Funktion.

Wir nehmen an, dass  $G(t, \tau)$  auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t, \tau) \mid a \leq \tau \leq t \leq b\} \quad \text{und} \quad D_2 := \{(t, \tau) \mid a \leq t \leq \tau \leq b\}$$

glatt ist, d.h. sich als eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion auf den Rand fortsetzen lässt, dass jedoch  $G(t, \tau)$  für  $t = \tau$  Sprünge haben können.

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^t G(t, \tau) h(\tau) d\tau + \int_t^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b G_t(t, \tau) h(\tau) d\tau + [G(t, t^-) - G(t, t^+)] h(t) \end{aligned}$$

# Fortsetzung der Konstruktion der Greenschen Funktion.

Wir verlangen nun

$$G(t, t^-) - G(t, t^+) = 0$$

das heißt  $G(t, \tau)$  ist stetig für  $t = \tau$ .

Für die zweite Ableitung gilt dann

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t, \tau) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \int_a^b L[G(\cdot, \tau)](t) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion  $G(t, \tau)$

$$L[G(\cdot, \tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1$$

# Lösungsdarstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion.

**Satz:** Sei  $G(t, \tau)$  eine Funktion  $G(t, \tau)$ , die die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

- 1 Die Funktion  $G(t, \tau)$  ist stetig auf  $[a, b]^2$  und lässt sich auf  $D_1$  und  $D_2$  als  $C^2$ -Funktion fortsetzen.
- 2 Die Funktion  $G(t, \tau)$  erfüllt bei festem  $\tau$  die homogene Differentialgleichung  $L[G(\cdot, \tau)] = 0$  für  $t \in [a, \tau]$  und  $t \in [\tau, b]$  sowie die Randbedingungen

$$R_k[G(\cdot, \tau)] = 0, \quad \text{für } k = 1, 2.$$

- 3 Die Funktion  $G(t, \tau)$  erfüllt die Bedingung

$$G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1.$$

Dann ist die Lösung  $y(t)$  des Randwertproblems gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

# Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion.

- ① Ist  $y_1(t), y_2(t)$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so machen wir den **Ansatz**

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) + b_2(t))y_2(t) & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) - b_2(t))y_2(t) & : \tau \geq t \end{cases}$$

- ② Die Stetigkeit und Sprungbedingung an  $G(t, \tau)$  liefert dann

$$b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) = 0$$

$$b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{2}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für  $b_1(t)$  und  $b_2(t)$  mit regulärer Koeffizientenmatrix.

- ③ Die Randbedingungen ergeben schließlich ein lineares Gleichungssystem für die beiden Größen  $a_1(t)$  und  $a_2(t)$ , das ebenfalls eindeutig lösbar ist.

# Ein Beispiel zur Greenschen Funktion.

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0\end{aligned}$$

Ein **Fundamentalsystem** ist  $y_1(t) = \cos t$  und  $y_2(t) = \sin t$ .

Unser **Ansatz** für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t)) \cos t + (a_2(t) + b_2(t)) \sin t & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t)) \cos t + (a_2(t) - b_2(t)) \sin t & : \tau \geq t \end{cases}$$

Die Koeffizienten  $b_1(t)$  und  $b_2(t)$  lösen das **lineare Gleichungssystem**

$$\begin{aligned}b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Das lineare Gleichungssystem

$$b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t = 0$$

$$-b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t = \frac{1}{2}$$

kann wie folgt aufgelöst werden:

**Multipliziere** die erste Gleichung mit  $\sin t$  sowie die zweite Gleichung mit  $\cos t$  und **addiere**. Wir erhalten damit

$$(\sin^2 t + \cos^2 t)b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$$

und daraus folgt

$$b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$$

Durch Einsetzen dieser Lösung ergibt sich  $b_1(t)$  als

$$b_1(t) = -\frac{1}{2} \sin t$$



## Fortsetzung des Beispiels.

Wir setzen nun  $G(t, \tau)$  in die vorgegebenen **Randbedingungen** ein:

Man berechnet

$$\begin{aligned}G(0, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=0} \\ &= a_1(\tau) + b_1(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(\pi, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=\pi} \\ &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_t(0, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=0} \\ &= a_2(\tau) + b_2(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_t(\pi, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=\pi} \\ &= -(a_2(\tau) + b_2(\tau))\end{aligned}$$

# Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich

$$G(0, \tau) - G(\pi, \tau) = \left( a_1(\tau) - b_1(\tau) \right) + \left( a_1(\tau) + b_1(\tau) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$G_t(0, \tau) - G_t(\pi, \tau) = \left( a_2(\tau) - b_2(\tau) \right) + \left( a_2(\tau) + b_2(\tau) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt aber  $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$  und die **Greensche Funktion** lautet

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \leq t \\ -\frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \geq t \end{cases}$$

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^\pi \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

**Beachte:** Die Lösungsformel gilt für **beliebige** Inhomogenitäten  $h(t)$ .

# Kapitel 4. Randwertaufgaben

## 4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein **homogenes lineares Randwertproblem**  $n$ -ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t, \lambda)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t, \lambda)y(t) = 0$$

$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} \left( \alpha_{k,l} y^{(l)}(a) + \beta_{k,l} y^{(l)}(b) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ab.

**Ziel:** Wir suchen nach **nichttrivialen** Lösungen des Problems.

Sei  $y_1, \dots, y_n$  ein Fundamentalsystem von  $L[y]$ . Dann hängen die  $y_k$  auch von  $\lambda$  ab, d.h.  $y_k = y_k(t, \lambda)$  und eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

## 4.4 Eigenwertaufgaben

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

ist eine Lösung, falls die Randbedingungen

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^n c_k R_j[y_k] = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

erfüllt sind. Dies ergibt für die Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$  ein **homogenes lineares Gleichungssystem** mit Systemmatrix

$$\mathbf{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \dots & R_1[y_n] \\ \vdots & \vdots & \\ R_n[y_1] & \dots & R_n[y_n] \end{pmatrix}$$

Es existieren also **genau dann** nichttriviale Lösungen  $y(t) \neq 0$ , falls gilt

$$D(\lambda) := \det \mathbf{E}(\lambda) = 0$$

# Eigenwerte und Eigenfunktionen.

**Definition:** Die Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  mit  $D(\lambda) = 0$  heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen nennt man die zugehörigen **Eigenfunktionen**. Diese sind höchstens bis auf skalare Vielfache eindeutig.

**Bemerkung:** Die Bedingung  $D(\lambda) = 0$  ist im Allgemeinen ein nichtlineares Nullstellenproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Eigenwertprobleme lassen sich in nichtlineare Randwertaufgaben transformieren. Wir setzen dazu  $y_{n+1}(t) := \lambda$  und finden dann

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t, y_{n+1})y^{(n-1)}(t) - \dots - a_0(t, y_{n+1})y(t)$$

$$y'_{n+1} = 0$$

$$R_k[y, y_{n+1}] = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

$$y'(a) = 1 \quad (\text{Normierung})$$

# Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda t) = 0$$

Für die **Eigenwerte** ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t)$$

# Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) - y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 \left( \sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda) \right) = 0$$

Die **Eigenwerte** sind die Lösungen der nichtlinearen Gleichung  $\lambda = \tan \lambda$  mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \lambda_k \neq 0 \\ t & : \lambda_k = 0 \end{cases}$$

## 5.1 Allgemeines

Gegeben sei die skalare Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Wir wollen die Lösung  $y(t)$  an einer Stelle  $b > a$  berechnen.

Kann man die Lösung nicht explizit durch Integration bestimmen, so verwendet man ein **Diskretisierungsverfahren**. Wir definieren dazu eine Zerlegung des Integrationsintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

sowie die Näherungen

$$Y_j \approx y(t_j), \quad j = 0, \dots, m$$

Man nennt  $h_j := t_{j+1} - t_j$  die **Schrittweite** des Diskretisierungsverfahrens.



# Numerischer Integrator und Klassifikation.

**Definition:** Das Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung  $(Y_0, \dots, Y_m)$  bezeichnet man als **Numerischen Integrator**.

Numerische Verfahren lassen sich bestimmten Klassen zuordnen:

## ① Einschrittverfahren

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Man nennt  $\Phi$  die **Verfahrensfunktion**.

## ② Mehrschrittverfahren

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j, \dots, Y_{j-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Man verwendet die bereits berechneten Näherungen  $Y_j, \dots, Y_{j-k}$ .

## ③ Extrapolationsverfahren

Kombiniere ein Einschritt- bzw. Mehrschrittverfahren aus 1) und 2) mit verschiedenen Schrittweiten und extrapoliere das Ergebnis.

# Wichtige Fragen zur Qualität eines Integrators.

- ❶ Es gelte  $Y_j = y(t_j)$ . Welchen Fehler machen wir im nächsten Integrationsschritt, d.h.

$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = ?$$

- ❷ Wenn wir die **lokalen** Fehler  $|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}|$  kontrollieren können, was gilt dann zur Zeit  $t = b$ , d.h.

$$|y(b) - Y_m| = ?$$

Insbesondere, wenn wir  $h_j \rightarrow 0$  wählen, d.h. **konvergiert** das Verfahren im Grenzfall  $h_j \rightarrow 0$ ?

- ❸ Gibt es eine geeignete Wahl für die Schrittweite  $h_j$ , so dass der Approximationsfehler – etwa im Vergleich zum Rechenaufwand – minimal wird.

## 5.2 Einschrittverfahren

Das **Eulersche Polygonzugverfahren** ist das einfachste Einschrittverfahren und lautet

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j f(t_j, Y_j)$$

Das Verfahren entsteht aus der Approximation

$$y'(t_j) = f(t_j, Y_j) \approx \frac{1}{h_j} (Y_{j+1} - Y_j)$$

### Geometrische Deutung:

Zur Berechnung des Wertes  $Y_j$  laufe ich immer ein kurzes Stück in Richtung der Tangente im Punkt  $Y_j$ , d.h. entlang der Geraden mit Steigung  $f(t_j, Y_j)$ .

## Zwei weitere Einschrittverfahren.

**Verfahren von Heun:** Wähle den Mittelwert zweier Steigungen

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f(t_j + h_j, Y_j + h_j K_1)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j \left( \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$

**Das modifizierte Euler-Verfahren:** (Lothar Collatz, Hamburg, 1960)

Wähle eine mittlere Steigung

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} K_1\right)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j K_2$$

# Der lokale Diskretisierungsfehler.

**Definition:** Gegeben sei die Näherung  $(t_j, Y_j)$  und ein Einschrittverfahren in der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Sei  $z(t)$  die Lösung des (lokalen) Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_j) = Y_j$$

a) Das **exakte Inkrement** ist gegeben durch

$$\Delta(t_j, Y_j, h) := \frac{z(t_j + h) - Y_j}{h}$$

b) Man nennt dann

$$\tau(t_j, Y_j, h) := \Delta(t_j, Y_j, h) - \Phi(t_j, Y_j, h)$$

den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

# Konsistente Verfahren und Verfahrensordnung.

**Definition:** (Fortsetzung)

- c) Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten  $f(t, y)$  gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung**  $p$ , falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists C, h_0 > 0 : \forall h \in (0, h_0] : |\tau(t_j, Y_j, h)| \leq Ch^p$$

**Bemerkung:** Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h} \left( z(t_{j+1}) - Y_{j+1} \right)$$

darstellen, d.h.  $\tau$  ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

# Berechnung der Konsistenzordnung.

Man verwendet dazu die **Taylor-Entwicklung** von  $z(t+h)$  um  $h=0$ :

$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Nun gilt neben  $z(t) = Y$

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

$$z''(t) = f_t(t, z) + f_y(t, z)z' = f_t(t, z) + f_y(t, z)f(t, z)$$

$$z^{(3)}(t) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d$$

Wir erhalten daher für  $\Delta(t, y, h) = (z(t+h) - Y)/h$  den Ausdruck

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d) + O(h^3),$$

wobei die rechte Seite an der Stelle  $(t, z(t)) = (t, Y)$  ausgewertet wird.

# Beispiele.

- ① Beim Euler-Verfahren gilt  $\Phi = f(t, Y)$  und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^2)$$

Das Verfahren ist also **konsistent erster Ordnung**.

- ② Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2} (f(t, Y) + f(t + h, Y + hf(t, Y))) \\ &= \frac{1}{2} \left( f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{2}(f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + O(h^2) \right)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tau = \Delta - \Phi = O(h^2)$$

Das Heun-Verfahren ist ein **konsistentes Verfahren zweiter Ordnung**.



# Konvergenzsatz.

**Satz:** Die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

existiere im Intervall  $[a, b]$ . Das Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

sei konsistent und besitze die Ordnung  $p$  mit  $|\tau(t, Y, h)| \leq Ch^p$ .

Ferner sei die Verfahrensfunktion  $\Phi$  Lipschitz-stetig bezüglich  $Y$ :

$$|\Phi(t, \tilde{Y}, h) - \Phi(t, Y, h)| \leq L|\tilde{Y} - Y|$$

Dann gilt für die mit äquidistanter Schrittweite  $h = (b - a)/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , berechneten Näherungen  $Y_m = Y(b; h)$  von  $y(b)$ :

$$|Y(b; h) - y(b)| \leq \frac{1}{L} \left( e^{L(b-a)} - 1 \right) Ch^p$$

# Runge–Kutta–Verfahren.

Die allgemeine Form eines Runge–Kutta Verfahrens mit **Stufenzahl  $s$**  lautet

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_1(t, Y, h) = f(t, Y)$$

$$K_i(t, Y, h) = f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)$$

Schreibweise als **Butcher–Schema**

0					
$a_2$	$b_{21}$				
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$a_s$	$b_{s1}$	$b_{s2}$	$\dots$	$b_{s,s-1}$	
<hr/>					
	$c_1$	$c_2$	$\dots c_{s-1}$	$c_s$	

# Beispiele.

- Das **Verfahren von Heun** ( $p = 2$ ) als Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- Das **modifizierte Euler-Verfahren** ( $p = 2$ ) als Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

# Weitere Beispiele

- Die **Kutta-Regel** ( $p = 3$ )

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

- Das **klassische Runge-Kutta-Verfahren** ( $p = 4$ )

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

# Runge–Kutta–Fehlberg–Verfahren.

Man kombiniert zwei RK–Verfahren der Ordnung  $p$  und  $p + 1$ , um eine automatische Schrittweitensteuerung zu generieren:

$$\frac{z(t_j + h) - Y_{j+1}}{h} = Ch^p + O(h^{p+1})$$

$$\frac{z(t_j + h) - \hat{Y}_{j+1}}{h} = O(h^{p+1})$$

Daraus folgt aber

$$\tau(t_j, Y_j, h) \approx Ch^p \approx \frac{|\hat{Y}_{j+1} - Y_j|}{h} =: \tau_{est}$$

Wähle die Schrittweite stets so, dass

$$\tau_{est} \leq \text{TOL}$$

mit gegebener Genauigkeitstoleranz TOL gilt.

# Allgemeine Form der RKF-Verfahren.

Die allgemeine Form ist gegeben durch

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$\hat{Y}_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{\hat{s}} \hat{c}_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_i(t, Y, h) = f \left( t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l \right)$$

**Beispiel:** Das RKF2(3)-Verfahren nach Erwin Fehlberg (1969)

0		
1	1	
1/2	1/4	1/4
<hr/>		
$p = 2$	1/2	1/2
$p = 3$	1/6	1/6 2/3

# Beispiel.

Das RKF4(5)-Verfahren nach England (1969)

0						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
1	0	-1	2			
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{10}{27}$	0	$\frac{1}{27}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{28}{625}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{546}{625}$	$\frac{54}{625}$	$-\frac{378}{625}$	
	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	
	$\frac{14}{336}$	0	0	$\frac{35}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{125}{336}$

## 5.3 Anfangswertmethoden für Randwertprobleme

Das einfache Schießverfahren (Shooting Method) Wir betrachten ein Randwertproblem zweiter Ordnung der Form

$$\begin{cases} y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{cases}$$

Idee des Schießverfahrens: Kombiniere ein numerisches Verfahren für das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a \\ y'(a) &= z \end{cases}$$

mit einem iterativen Prozess bezüglich des freien Parameters  $z$ , um die rechte Randbedingung zu erfüllen, d.h.

$$y(b) = y_b$$



# Das einfache Schießverfahren und ein Nullstellenproblem.

Bezeichnen wir mit  $y(t; z)$  die Lösung des Anfangswertproblems, so führt das Schießverfahren auf ein **Nullstellenproblem** der Funktion

$$F(z) := y(b; z) - y_b$$

**Beispiel:** Für die Randwertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

erhalten wir das zugehörige Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = z$$

die Lösung

$$y(x) = z \sin x + 4 \cos x$$

Die Funktion  $F(z)$  lautet daher

$$F(z) = z \sin 1 + 4 \cos 1 - 1$$

# Lösung des Nullstellenproblems.

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $F(z) = 0$  haben wir zwei Verfahren kennengelernt.

- 1 **Das Bisektionsverfahren** Seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei Punkte mit  $F(z_1) \cdot F(z_2) < 0$ . Wir berechnen dann

$$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Falls  $F(z_1) \cdot F(z_3) < 0$  so setzen wir  $z_1 = z_3$ , ansonsten  $z_1 = z_2$ .

- 2 **Das Newtonverfahren** Wir verwenden die Iterationsvorschrift

$$z_{k+1} = z_k - \frac{F(z_k)}{F'(z_k)}$$

Das Newton-Verfahren konvergiert im Allgemeinen quadratisch, aber man muss die Ableitung  $F'(z_k)$  berechnen.

# Allgemeine Zweipunkt–Randwertprobleme.

Für  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$  sei die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0} \end{cases}$$

gegeben.

**Schießverfahren:** Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit der Lösung  $\mathbf{y}(t; \mathbf{z})$ .

Das äquivalente Nullstellenproblem lautet jetzt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \mathbf{r}(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z})) = \mathbf{0}$$

Die Funktion  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist glatt, falls  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

# Lösung des zugehörigen Nullstellenproblems.

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$  verwendet man etwa das **gedämpfte Newton-Verfahren** aus Analysis III: für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechnet man

$$\mathbf{J}f(\mathbf{z}^k) \cdot \Delta \mathbf{z}^k = -f(\mathbf{z}^k)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{z}^k$$

Dabei ist die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}f(\mathbf{z})$  gegeben durch

$$\mathbf{J}f(\mathbf{z}) = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{Y}(b)$$

$$\mathbf{B}_a := \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z}))}$$

$$\mathbf{B}_b := \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z}))}$$

$$\mathbf{Y}(b) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{y}(b; \mathbf{z})$$

# Ein Beispiel, bei dem das Schießverfahren **nicht** funktioniert.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

Für  $\lambda = 5$  besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= z \end{cases}$$

nur für  $|z| \leq 0.05$  eine Lösung, die auf dem ganzen Intervall  $[0, 1]$  existiert.

Für die tatsächliche Lösung der Randwertwertaufgabe gilt

$$z^* = 0.0457504\dots$$

# Ein Beispiel, bei dem die Lösung bezüglich $z$ stark variiert.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = 12y + y', \quad y(0) = y(10) = 1$$

Die allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe kann man explizit berechnen:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}$$

Mit den Randwerten  $y(0) = y(10) = 1$  folgt

$$z_1^* = y(0) = 1, \quad z_2^* = y'(0) = -3 + 2.9 \dots \cdot 10^{-17}$$

und weiter gilt

$$y(10; 1, -3) = e^{-30} \approx 9.36 \cdot 10^{-14}$$

$$y(10; 1, -3 + 10^{-10}) \approx \frac{1}{7} e^{30} \approx 1.53 \cdot 10^{12}$$

Eine korrekte numerische Berechnung ist damit nahezu unmöglich!

# Die Mehrzielmethode (Multiple Shooting Method).

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) & \text{für } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases}$$

Kombiniere das einfache Schießverfahren mit einer Intervallunterteilung von  $[a, b]$ :

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

Man nennt die  $t_i$ 's auch die **Mehrzielknoten**.

Löse auf jedem Teilintervall (numerisch) das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

$$\mathbf{y}(t_j) = \mathbf{z}_j$$

und bezeichne die Lösung mit  $\mathbf{y}(t; t_j, \mathbf{z}_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ .

# Die Mehrzielmethode (Fortsetzung).

Die zusammengesetzte Lösung

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m-1}) := \begin{cases} \mathbf{y}(t; t_1, \mathbf{z}_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ \mathbf{y}(t; t_2, \mathbf{z}_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(t; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t < t_m \end{cases}$$

erfüllt genau dann die Randwertaufgabe, falls gilt

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{j+1}) := \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{z}_j) - \mathbf{z}_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-2$$

$$\mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{m-1}) := \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}(t_m; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1})) = \mathbf{0}$$

Dies ist äquivalent zu einem Nullstellenproblem für die Funktion

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1})^T : D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)n}, \quad D \subset \mathbb{R}^{(m-1)n}$$

Zur Lösung verwendet man wieder das gedämpfte Newton-Verfahren.