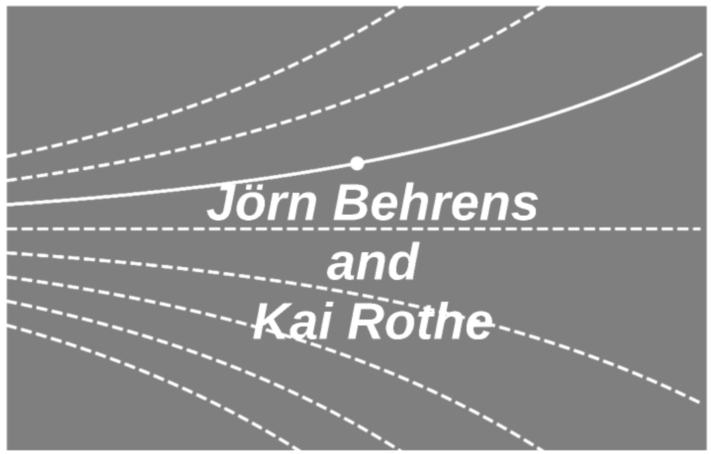
Differentialgleichungen I



Einführung

Kapitel 6.1-6.2

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg Mathematik/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunden nach Vereinbarung
(bitte per E-Mail vereinbaren)

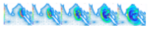
Hintergrund

Kurz-CV

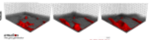
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung



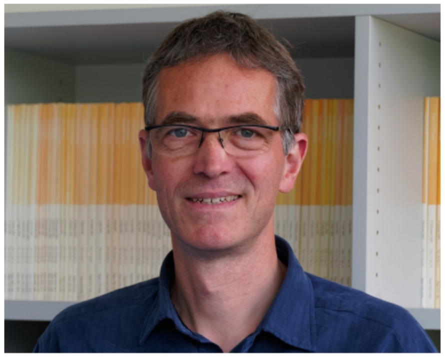
Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen

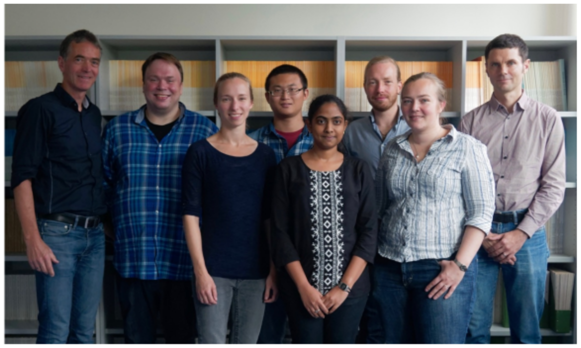
Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg Mathematik/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunden nach Vereinbarung
(bitte per E-Mail vereinbaren)

Hintergrund

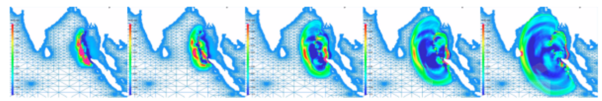


Kurz-CV

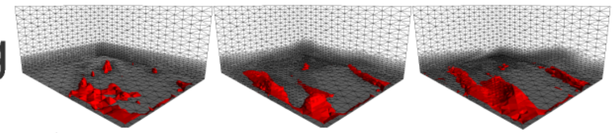
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung

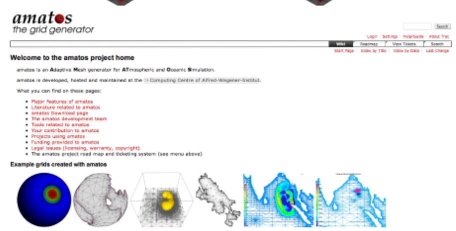


Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen



Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/

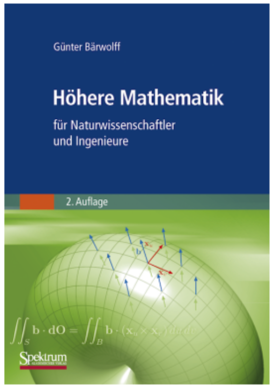
Stud.IP

Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.



Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/
Stud.IP

Bitte gründlich vorbereiten!

Historie

Historie:

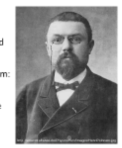
- Differentialgleichungen treten erstmals in den Arbeiten von Leibniz und Newton auf.
- Die Gleichungen waren vor allem durch zeit-abhängige physikalische Problemstellungen motiviert.


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)


Isaac Newton (1642-1726)

Philosophie:

- Die Lösung einer Differentialgleichung bedeutete einen Zustand in der Zukunft zu bestimmen!
- Dieses Paradigma beeinflusste den philosophischen Main-Stream: *Determinismus*.
- Poincaré zerstörte erst zu Anfang 20. Jhd. die deterministische Sicht (Grundlagen der dynamischen Systeme).


Henri Poincaré (1854-1912)

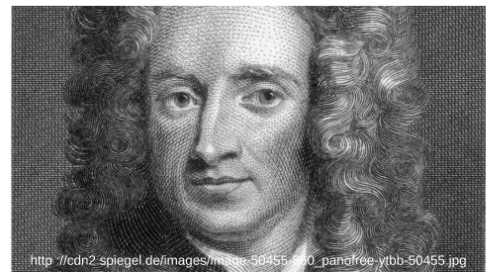
Historie:

- Differentialgleichungen treten erstmals in den Arbeiten von Leibniz und Newton auf.
- Die Gleichungen waren vor allem durch zeit-abhängige physikalische Problemstellungen motiviert.

Idee:

- Beobachte ein System zu zwei Zeiten t_1 und t_2, erhalte Zustände $s(t_1), s(t_2)$
- Betrachte die Differenz der Zustände und erhalte Gesetzmäßigkeit: $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} \approx g(t)$.
- Führe Grenzübergang durch und erhalte Differentialgleichung: $\lim_{t_1 \to t_2} \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{ds}{dt} = g(t)$.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Isaac Newton (1642-1726)

Philosophie:

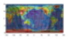
- Die Lösung einer Differentialgleichung bedeutete einen Zustand in der Zukunft zu bestimmen!
- Dieses Paradigma beeinflusste den philosophischen Main-Stream: *Determinismus*.
- Poincaré zerstörte erst zu Anfang 20. Jhd. die deterministische Sicht (Grundlagen der dynamischen Systeme).

Henri Poincaré (1854-1912)

Bemerkung:

- Im 18. Jhd. wurde das Konzept der Differentialgleichungen erweitert in mehreren Dimensionen: *Partielle Differentialgleichungen*.
- So wurden die Differentialgleichungen (einer Veränderlicher) *gewöhnlich*.

Anwendungen



Newton's Mechanics

The principle first law of mechanics is given by

$$\text{force} = \text{mass} \times \text{acceleration}.$$

We can write this law as an ODE:

$$\boxed{m\ x''(t) = F(t,x,x'),}$$

with m the mass, x'' the acceleration, F a force function depending on $t \in I \subset \mathbb{R}$, the time in an interval I, $x \in \mathbb{R}^3$, the location, x', the velocity of a mass particle. This is an ODE of second order, since x'' is involved.

Fields of application

- satellite trajectories, planetary or astro-mechanics
- ballistic problems
- multi-body systems
- robotics

Reaction Kinetics

Assume 3 chemical species, S_1, S_2, and S_3, with concentration densities or mass densities x_1, x_2, and x_3 respectively. We assume reactions

$$\begin{aligned} S_1 &\xrightarrow{k_1} S_2, \\ S_2 + S_3 &\xrightarrow{k_2} S_1 + S_3, \\ S_2 + S_2 &\xrightarrow{k_3} S_3 + S_2, \end{aligned}$$

with reaction constants k_1, k_2, and k_3 respectively. These reaction equations represent a *catalytic converter*.

This transforms into a system of ODEs, when we consider the mass effects:

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 \cdot x_3, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \cdot x_3 - k_3 x_2^2, \\ x_3' &= + k_3 x_2^2. \end{aligned}$$

We need further conditions for a unique solution. For conservation of mass, we assume that

$$x_1' + x_2' + x_3' = \sum_{i=1,2,3} x_i' = 0,$$

which is equivalent to $\sum_i x_i = \text{const.}$, i.e. total mass is constant over time. Additionally, we assume that the initial concentrations are given by

$$x_1(0) = x_{1,0}; \quad x_2(0) = x_{2,0},$$

where the initial concentration $x_3(0)$ results from the conservation of mass equations.

Generell:
[Anwendung von Differentialgleichungen auf technische Problemstellungen]

1. Mathematische Modellierung eines Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung.
2. Formulierung sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen.
3. Lösen der Differentialgleichung (berücksichtige Anfangs- und Randbed.).
4. Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung.

Biological Systems

Consider the simple model of exponential growth of a population (think of cells that duplicate in each time interval τ). Since the exponential function is its own derivative (up to a constant) this can be written as

$$x' = ax; \quad x(t_0) = x_0,$$

analytical solution:

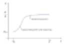
$$x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)}.$$

We can improve this model by assuming a maximum number of individuals (a saturation) by exchanging

$$a \longrightarrow a - bx.$$

This yields a non-linear equation

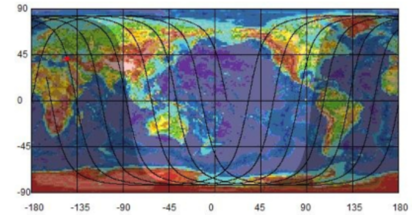
$$x' = (a - bx)x; \quad x(t_0) = x_0.$$



$$\begin{aligned} x_1'(t) &= (a - bx_2(t))x_1(t), \\ x_2'(t) &= (cx_1(t) - d)x_2(t). \end{aligned}$$

This represents a *system of ODEs*, called the *Lottka-Voltera equations*.

1



Newton's Mechanics

The principle first law of mechanics is given by

$$\text{force} = \text{mass} \times \text{acceleration}.$$

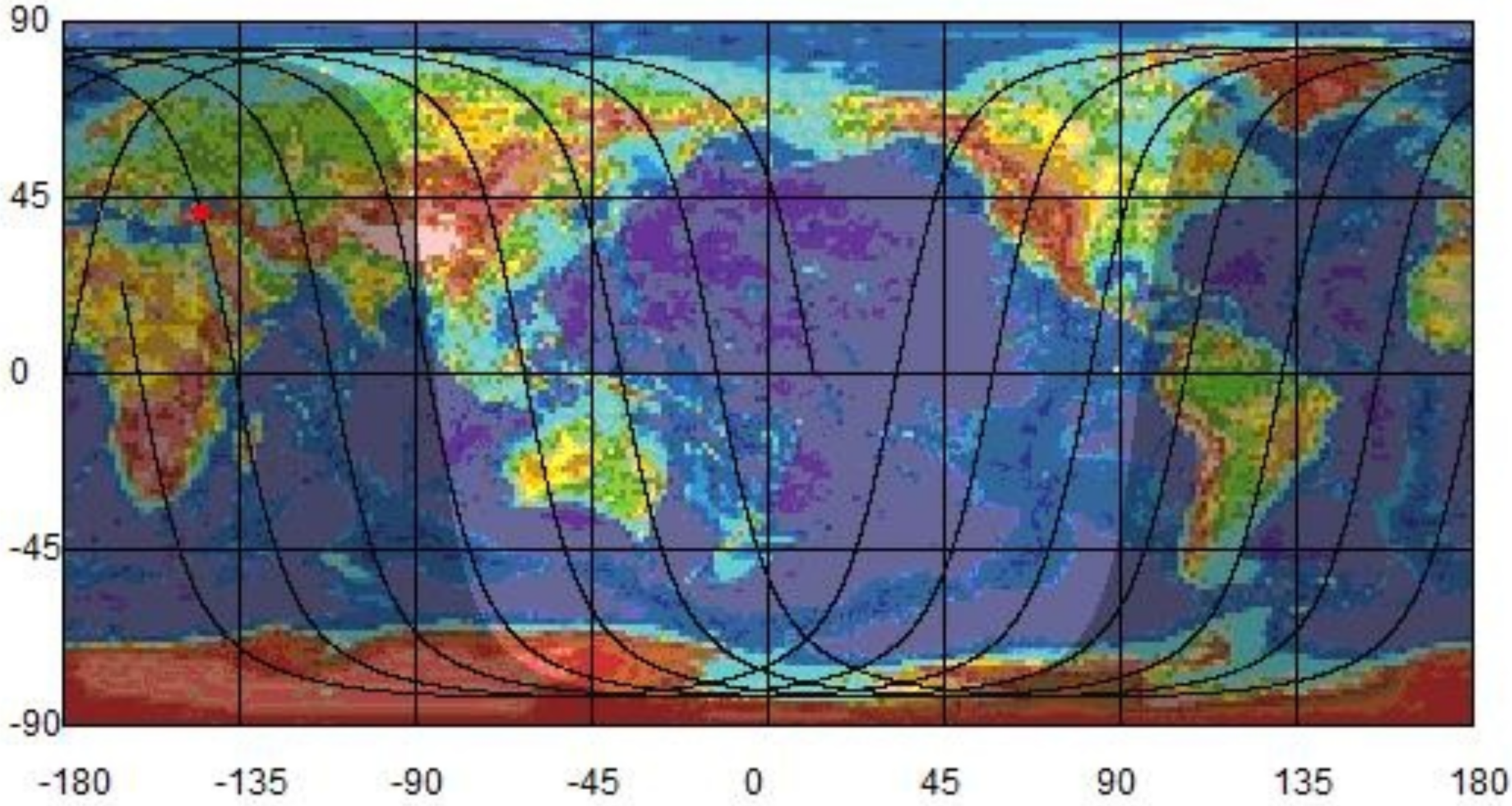
We can write this law as an ODE:

$$\boxed{\text{m} \;\; \text{x''}(\text{t}) = \text{F}(\text{t,x,x'}),}$$

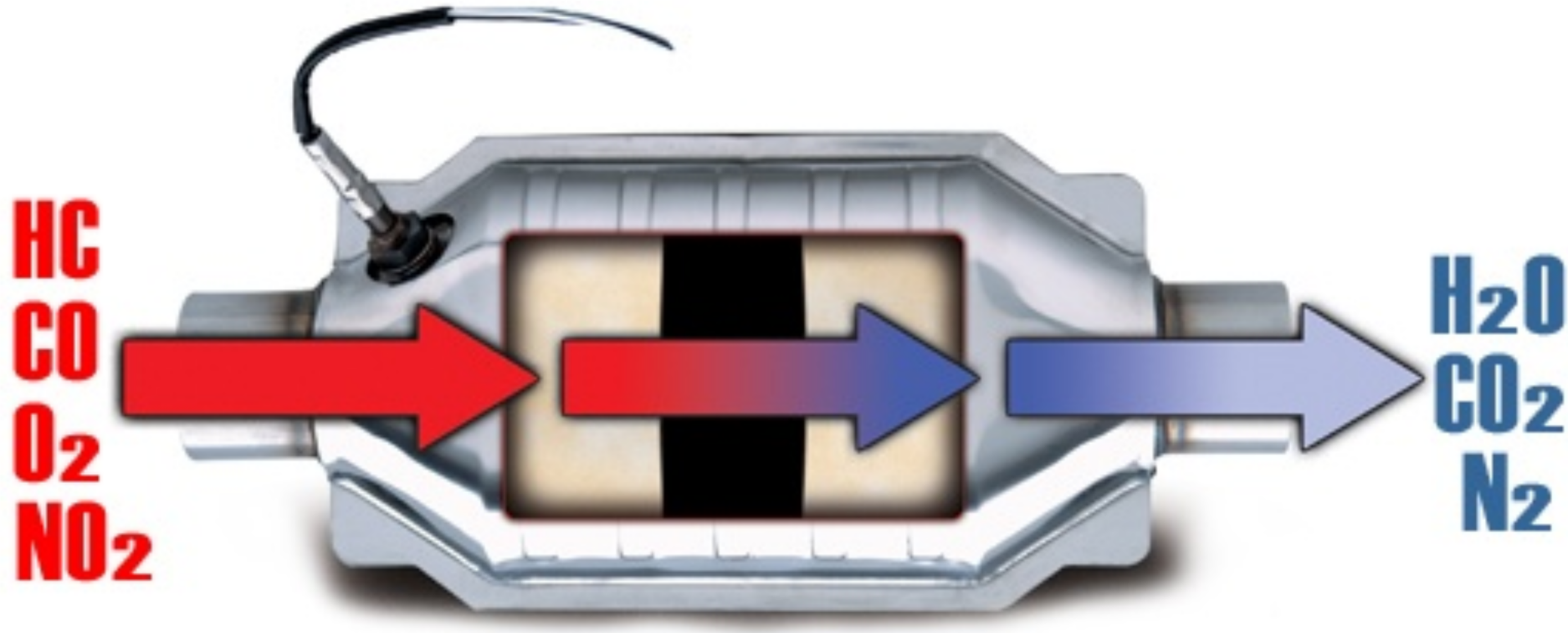
with m the mass, x'' the acceleration, F a force function depending on $t \in I \subset \mathbb{R}$, the time in an interval I, $x \in \mathbb{R}^3$, the location, x', the velocity of a mass particle. This is an ODE of second order, since x'' is involved.

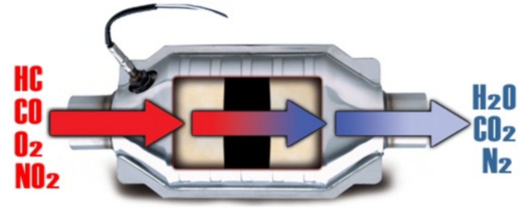
Fields of application

- satellite trajectories, planetary or astro-mechanics
- ballistic problems
- multi-body systems
- robotics



90
45
0
-45
-90
-180
-135
-90
-45
0
45
90
135
180


HC
CO
O2
NO2
H2O
CO2
N2



Reaction Kinetics

Assume 3 chemical species, S_1, S_2, and S_3, with concentration densities or mass densities x_1, x_2, and x_3 respectively. We assume reactions

$$\begin{aligned} S_1 &\xrightarrow{k_1} S_2, \\ S_2 + S_3 &\xrightarrow{k_2} S_1 + S_3, \\ S_2 + S_2 &\xrightarrow{k_3} S_2 + S_3, \end{aligned}$$

with reaction constants k_1, k_2, and k_3 respectively. These reaction equations represent a *catalytic converter*.

This transforms into a system of ODEs, when we consider the mass effects:

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 \cdot x_3, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \cdot x_3 - k_3 x_2^2. \end{aligned}$$

mass densities x_1, x_2, and x_3 respectively. We assume reactions

$$\begin{aligned} S_1 &\xrightarrow{k_1} S_2, \\ S_2 + S_3 &\xrightarrow{k_2} S_1 + S_3, \\ S_2 + S_2 &\xrightarrow{k_3} S_2 + S_3, \end{aligned}$$

with reaction constants k_1, k_2, and k_3 respectively. These reaction equations represent a *catalytic converter.*

This transforms into a system of ODEs, when we consider the mass effects:

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 \cdot x_3, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \cdot x_3 - k_3 x_2^2, \\ x_3' &= + k_3 x_2^2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -k_1x_1 + k_2x_2 \cdot x_3, \\
x_2' &= k_1x_1 - k_2x_2 \cdot x_3 - k_3x_2^2, \\
x_3' &= + k_3x_2^2.
\end{aligned}
$$

We need further conditions for a unique solution. For conservation of mass, we assume that

$$x_1' + x_2' + x_3' = \sum_{i=1:3} x_i' = 0,$$

which is equivalent to $\sum_i x_i = \text{const.}$, i.e. total mass is constant over time. Additionally, we assume that the initial concentrations are given by

$$x_1(0) = x_{1,0}; \quad x_2(0) = x_{2,0},$$

where the initial concentration $x_3(0)$ results from the conservation of mass equations.

Biological Systems

Consider the simple model of exponential growth of a population (think of cells that duplicate in each time interval τ). Since the exponential function is its own derivative (up to a constant) this can be written as

$$x' = ax; \quad x(t_0) = x_0,$$

analytical solution:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$$

$$x' = ax; \quad x(t_0) = x_0,$$

analytical solution:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)}.$$

We can improve this model by assuming a maximum number of individuals (a saturation) by exchanging

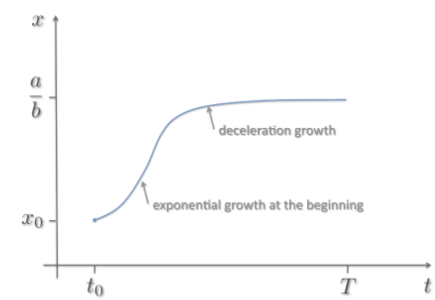
$$a \longrightarrow a - bx$$

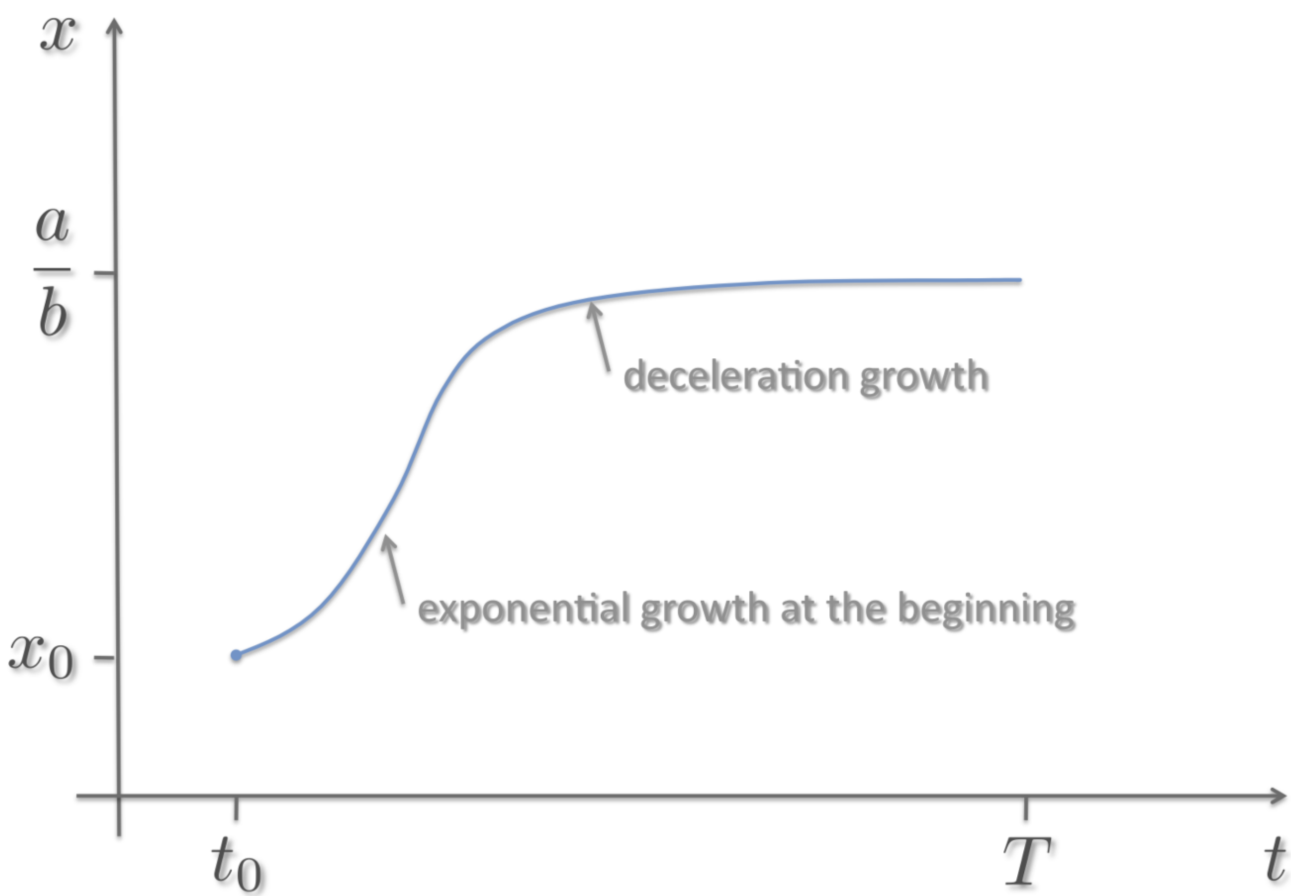
We can improve this model by assuming a maximum number of individuals (a saturation) by exchanging

$$a \longrightarrow a - bx.$$

This yields a non-linear equation

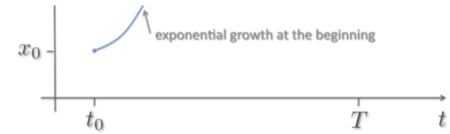
$$x' = (a - bx)x; \quad x(t_0) = x_0.$$





x
$\frac{a}{b}$
x_0
deceleration growth
exponential growth at the beginning
t_0
T
t

$$x' = (a - bx)x, \quad x(t_0) = x_0.$$



$$\begin{aligned} x_1'(t) &= (a - bx_2(t))x_1(t), \\ x_2'(t) &= (cx_1(t) - d)x_2(t). \end{aligned}$$

This represents a *system of ODEs*, called the *Lottka-Voltera equations*.

Generell:
(Anwendung von Differentialgleichungen auf technische Problemstellungen)

1. Mathematische Modellierung eines Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung.
2. Formulierung sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen.
3. Lösen der Differentialgleichung (berücksichtige Anfangs- und Randbed.).
4. Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung

Grundbegriffe

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (DGL n-ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad \text{(implizite Form)}$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{(explizite Form).}$$

Bezeichne eine Funktion y, welche die DGL erfüllt als Lösung oder Integral der DGL.

2

Definition (Anfangs- und Randwerte):
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen Anfangsbedingungen, andernfalls Randbedingungen.

Ein Anfangswertproblem ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.
Entsprechend ist ein Randwertproblem gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (DGL n-ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad \text{(implizite Form)}$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{(explizite Form).}$$

Bezeichne eine Funktion y, welche die DGL erfüllt als Lösung oder Integral der DGL.

2

Definition (Anfangs- und Randwerte):
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen Anfangsbedingungen, andernfalls Randbedingungen.

Ein Anfangswertproblem ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.
Entsprechend ist ein Randwertproblem gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

DGLn 1. Ordnung

Vorbemerkungen:

- Sei die DGL in expliziter Form gegeben: $y' = f(x, y)$.
- Durch die DGL ist in jedem Punkt $x, y \in D_f$, dem Definitionsbereich von f, eine "Steigung" y' der Lösungskurve gegeben.
- Bezeichne eine kurze Strecke mit Steigung y' in (x, y) als Linienelement.

Zur Lösbarkeit von Differentialgleichungen:

- Sei $f(x, y)$ in einem Gebiet $D_f \subset \mathbb{R}^2$ definiert und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.
- Ein Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Weitere Begriffe:

- Die Funktion $y = \phi(x, C)$ heißt allgemeine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$.
- Für ein konkretes C_0 erhält man die partikuläre Lösung $y = \phi(x, C_0)$.
- Hat eine Lösung $y = \Phi(x)$ die Eigenschaft, dass durch jeden ihrer Punkte mindestens eine weitere Lösung verläuft, so heißt sie singuläre Lösung.

Bemerkungen:

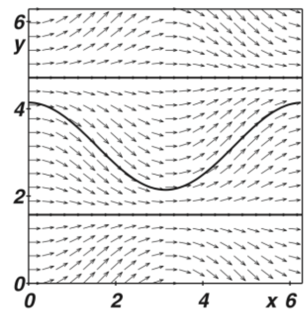
- Die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des AWP ist maximal im folgenden Sinne: $y(x)$ läuft bis zum Rand von D_f und lässt sich in D_f nicht mehr als stetig diff'bare Kurve fortsetzen. Unter Voraussetzungen 2. des Satzes existiert genau eine maximale Lösung des AWP und I ist das maximale Definitionsintervall.
- Stetigkeit allein reicht lediglich für die Existenz, Eindeutigkeit folgt nur aus 2.
- Ist f auf D_f stetig partiell diff'bar, so bilden die Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ eine Schar $y = \phi(x, C)$, wobei jeder Anfangsbedingung genau ein Wert von C entspricht.

Vorbemerkungen:

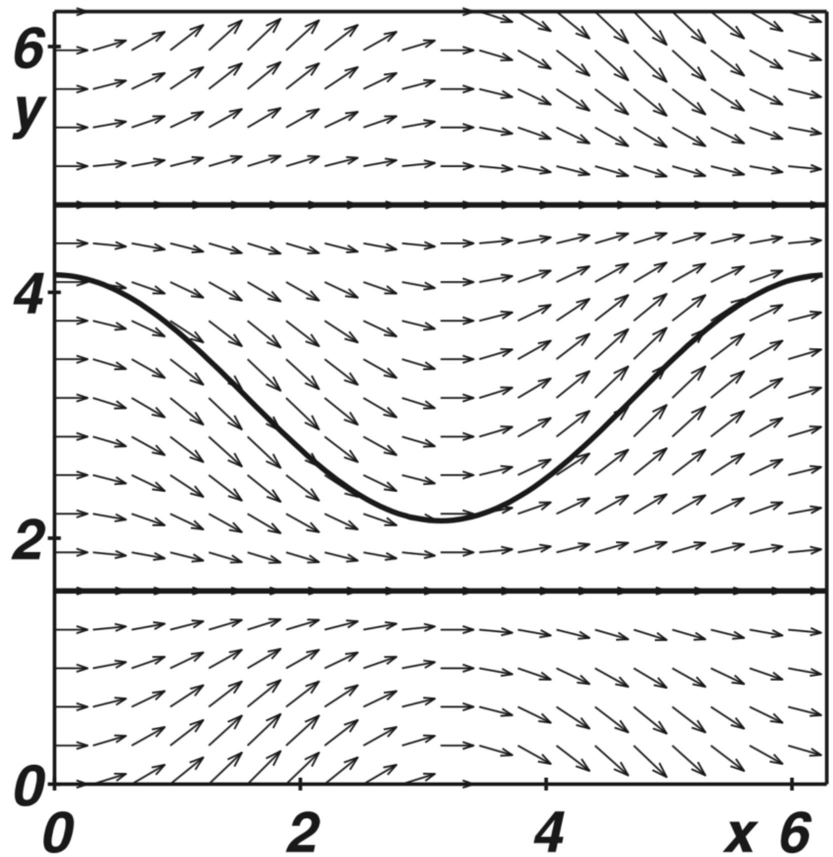
- Sei die DGL in expliziter Form gegeben: $y' = f(x,y)$.
- Durch die DGL ist in jedem Punkt $x, y \in D_f$, dem Definitionsbereich von f, eine "Steigung" y' der Lösungskurve gegeben.
- Bezeichne eine kurze Strecke mit Steigung y' in (x,y) als Linienelement.

Definition (Richtungsfeld):
Das Richtungsfeld einer DGL ist gegeben durch die Gesamtheit aller Linienelemente.

Bemerkung: Die Lösungen von $y' = f(x,y)$ entsprechen Kurven, die in das Richtungsfeld "passen".



Richtungsfeld der DGL $y' = \sin x \cos y$



Richtungsfeld der DGL $y' = \sin x \cos y$

Zur Lösbarkeit von Differentialgleichungen:

- Sei $f(x, y)$ in einem Gebiet $D_f \subset \mathbb{R}^2$ definiert und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.
- Ein Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz):

1. Sei $f(x, y)$ in D_f stetig. Dann gibt es in einem gewissen Intervall $I = \{x : x_0 - a < x < x_0 + b\}$ um x_0 ($a, b > 0$ geeignet) mindestens eine Lösung $y(x)$ des AWP.
2. Sei die Funktion $f(x, y)$ sowie ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ in D_f stetig. Dann gibt es durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$ genau eine Lösung $y(x)$ des AWP, die in einem Intervall I um x_0 existiert.
3. Jede Lösungskurve $y(x)$ des AWP kann nach beiden Seiten (d.h. für $x < x_0$ und $x > x_0$) soweit fortgesetzt werden, dass sie den Rand des Gebietes D_f trifft, bzw. ihm beliebig nahe kommt.

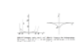
Bemerkungen:

- Die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des AWP ist maximal im folgenden Sinne: $y(x)$ läuft bis zum Rand von D_f und lässt sich in D_f nicht mehr als stetig diff'bare Kurve fortsetzen. Unter Voraussetzungen 2. des Satzes existiert genau eine maximale Lösung des AWP und I ist das maximale Definitionsintervall.

- Stetigkeit allein reicht lediglich für die Existenz, Eindeutigkeit folgt nur aus 2.

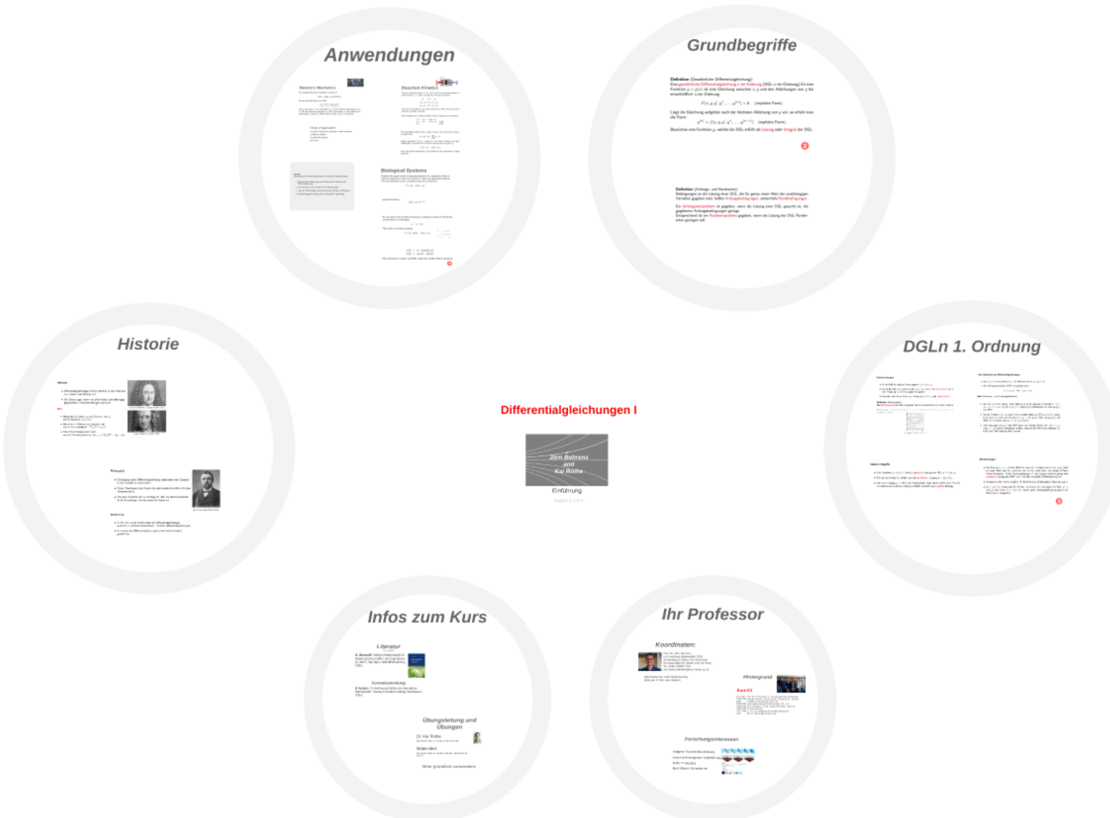
- Ist f auf D_f stetig partiell diff'bar, so bilden die Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ eine Schar $y = \phi(x, C)$, wobei jeder Anfangsbedingung genau ein Wert von C entspricht.

3



Weitere Begriffe:

- Die Funktion $y = \phi(x, C)$ heißt allgemeine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$.
- Für ein konkretes C_0 erhält man die partikuläre Lösung $y = \phi(x, C_0)$.
- Hat eine Lösung $y = \Phi(x)$ die Eigenschaft, dass durch jeden ihrer Punkte mindestens eine weitere Lösung verläuft, so heißt sie singuläre Lösung.



Anwendungen
Grundbegriffe
Historie
Differentialgleichungen I
Einführung
DGLn 1. Ordnung
Infos zum Kurs
Ihr Professor