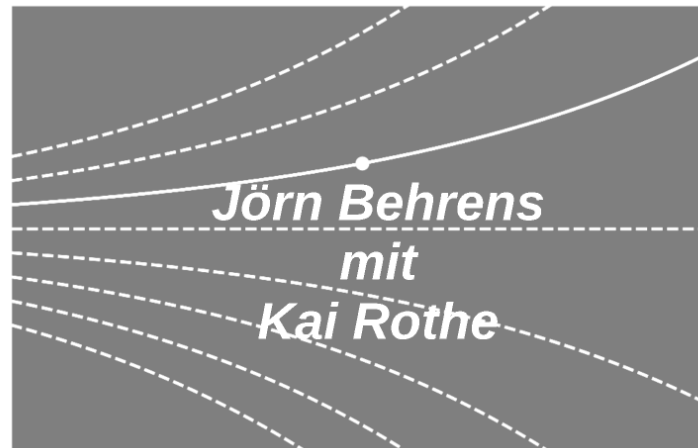


Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Lösung von DGLn durch Transformation
Systeme 1. Ordnung

Buch Kapitel 6.6-6.7

Erinnerung: Trennung der Variablen Variation der Konstanten

Lösungsschema:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x .
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.

4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des ANP $y(x_0) = y_0$.

Lösungsskizze 2: (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variere C , d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz: $y(x) = C(x)e^{-P(x)}$.

- Einsetzen: $C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x)$.

- Umformen und Integrieren:

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{P(x)} dx + C_1, \quad C_1 = \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}.$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$y(x) = e^{-P(x)} \left(C_1 + \int q(x)e^{P(x)} dx \right) \\ = C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)} dx \\ = \text{hom}(x) + \text{inh}(x).$$

Lösungsschema:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x .
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.

4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variere C , d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

- Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) &\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)} \left(C_1 + \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

Transformation

Vorbemerkung:

- **Ziel:** Lösung verschiedener DGLs erster und zweiter Ordnung
- **Typ:** Betrachte DGL von der Form
$$F(x, y, y') = 0$$

Betrachte:

Sei nun die DGL 2. Ordnung gegeben, wobei x nicht explizit auftaucht:
$$F(y, y', y'') = 0$$

Betrachte:

Differentialgleichung der Form $y' = \phi(ax + by + c)$, $b \neq 0$. Sei ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution:** mit $z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$ ergibt sich:

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

und damit

$$z' = a + b\phi(z),$$

- **Trennung der Variablen:** Als Lösung erhält man

$$\frac{dz}{a + b\phi(z)} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{a + b\phi(z)} = \int dx + C = x + C.$$

Betrachte:

DGL der Form $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, mit $x \neq 0$ und ϕ stetig.

Vorbemerkung:

- **Ziel:** Lösung verschiedener DGLn erster und zweiter Ordnung
- **Typ:** Betrachte DGL von der Form

$$F(x, y', y'') = 0$$

Idee:

- **Substitution:** mit $v := y'$ ergibt sich DGL 1. Ordnung:

$$F(x, v, v') = 0$$

- **Integration:** Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist

$$y(x) = \int \Psi(x, C) dx + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung.

1

Betrachte:

Sei nun die DGL 2. Ordnung gegeben, wobei x nicht explizit auftaucht:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Lösungsidee:

- **Substitution:** mit $v(y) := y'$ ergibt sich durch die Kettenregel:

$$y'' = \frac{d}{dx}v(y) = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y)$$

Also erhält man eine DGL 1. Ordnung für v : $F(y, v, v'v) = 0$.

- **Integration:** Falls $v = \Psi(y, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist mit $v(y) = y'$

$$y' = \Psi(y, C)$$

eine DGL mit trennbaren Veränderlichen für y gegeben, mit allgemeiner impliziter Lösung

$$\int_{y_0}^y \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

2

Betrachte:

DGL der Form $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, mit $x \neq 0$ und ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution:** mit $u = \frac{y}{x}$ ergibt sich:

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' = \phi(u)$$

und damit

$$xu' = \phi(u) - u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x}.$$

- **Trennung der Variablen:** Als Lösung erhält man

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln|x| + C. \quad \textcircled{3}$$

Betrachte:

Differentialgleichung der Form $y' = \phi(ax + by + c)$, $b \neq 0$. Sei ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution:** mit $z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$ ergibt sich:

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

und damit

$$z' = a + b\phi(z).$$

- **Trennung der Variablen:** Als Lösung erhält man

$$\frac{dz}{a + b\phi(z)} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{a + b\phi(z)} = \int dx + C = x + C.$$

Eulersche DGL

Definition:
Differentialgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^k a_j x^j y^{(j)}(x) = f(x),$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, \dots, k$) konstant, $a_k \neq 0$, $x > 0$,
heißen **Eulersche Differentialgleichungen** k -ter Ordnung.

Lösungsansatz:
Der Ansatz $y(x) = x^r$ für die homogene Gleichung, d.h. $f(x) \equiv 0$, ergibt:

$$\sum_{j=0}^k a_j r(r-1) \cdots (r-j+1) = 0.$$

Erhalte Gleichung, deren Lösung Nullstellen eines Polynoms in r vom Grad k sind.

Berechnung für den Fall $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' = 0$.
- Substitution ergibt: $a_0 + a_1 r + a_2 r(r-1) = 0$, quadratisches Polynom.
- Differenzieren bestätigt: $y = x^r$ ist Lösung der homogenen Euler DGL, falls r Nullstelle des Polynoms.
- Sind $r_1 \neq r_2$ reelle Nullstellen des Polynoms, so sind $y_1 = x^{r_1}$ und $y_2 = x^{r_2}$ Lösungen der DGL.
- Sind $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen, so ist mit $r_1 = a + ib$ auch $r_2 = r_1 = a - ib$ Nullstelle.
- Komplexe Lösung für $y = x^r$:
 $x^{a+ib} = e^{\ln x^{a+ib}} = e^{(a+ib) \ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = x^a [\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$
- Für komplexe Lösungen des Nullstellenproblems erhält man daher
 $y_1(x) = x^a \cos(b \ln x)$ und $y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$
zwei Lösung der homogenen Eulerschen DGL.
- Allgemeine Lösung: wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung
 $y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x)$. 4

Definition:

Differentialgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^k a_j x^j y^{(j)}(x) = f(x),$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, \dots, k$) konstant, $a_k \neq 0$, $x > 0$,
heißen **Eulersche Differentialgleichungen** k -ter Ordnung.

Lösungsansatz:

Der Ansatz $y(x) = x^r$ für die homogene Gleichung, d.h. $f(x) \equiv 0$, ergibt:

$$\sum_{j=0}^k a_j r(r-1) \cdots (r-j+1) = 0.$$

Erhalte Gleichung, deren Lösung Nullstellen eines Polynoms in r vom Grad k sind.

Berechnung für den Fall $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0y + a_1xy' + a_2x^2y'' = 0$.
- Substitution ergibt: $a_0 + a_1r + a_2r(r - 1) = 0$, quadratisches Polynom.
- Differenzieren bestätigt: $y = x^r$ ist Lösung der homogenen Euler DGL, falls r Nullstelle des Polynoms.
- Sind $r_1 \neq r_2$ reelle Nullstellen des Polynoms, so sind $y_1 = x^{r_1}$ und $y_2 = x^{r_2}$ Lösungen der DGL.
- Sind $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen, so ist mit $r_1 = a + ib$ auch $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ Nullstelle.
- Komplexe Lösung für $y = x^r$:

$$x^{a+ib} = e^{\ln x^{a+ib}} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = x^a [\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$$

- Für komplexe Lösungen des Nullstellenproblems erhält man daher

$$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$$

zwei Lösung der homogenen Eulerschen DGL.

- Allgemeine Lösung: wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x).$$

4

Transformation

Voraussetzung:

- Die DGL muss in der Form $y' + p(x)y = q(x)$ vorliegen.
- $p(x)$ und $q(x)$ sind Funktionen von x .

Beispiel:

Die DGL $y' + 2xy = x^2$ ist in der Form $y' + p(x)y = q(x)$ mit $p(x) = 2x$ und $q(x) = x^2$ gegeben.

Integration:

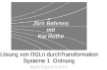
- Multipliziere die DGL mit dem Integrationsfaktor $e^{\int p(x) dx}$.
- Die linke Seite ist dann die Ableitung von $e^{\int p(x) dx} y$.
- Integriere die rechte Seite.

Beispiel:

Die DGL $y' + 2xy = x^2$ wird mit dem Integrationsfaktor $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ multipliziert.

Differentialgleichungen I

Wintersemester 2010/2011



Erinnerung: Trennung der Variablen Variation der Konstanten

Trennung der Variablen: $y' = f(x)g(y)$

Variation der Konstanten: $y' + p(x)y = q(x)$

Eulersche DGL

Definition: Eine DGL der Form $xy'' + \alpha y' + \beta y = \gamma x^\alpha$ heißt Eulersche DGL.

Ansatz: $y = x^r$

Beispiel: Die DGL $xy'' + 2y' + 2y = 0$ ist eine Eulersche DGL mit $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $\gamma = 0$.