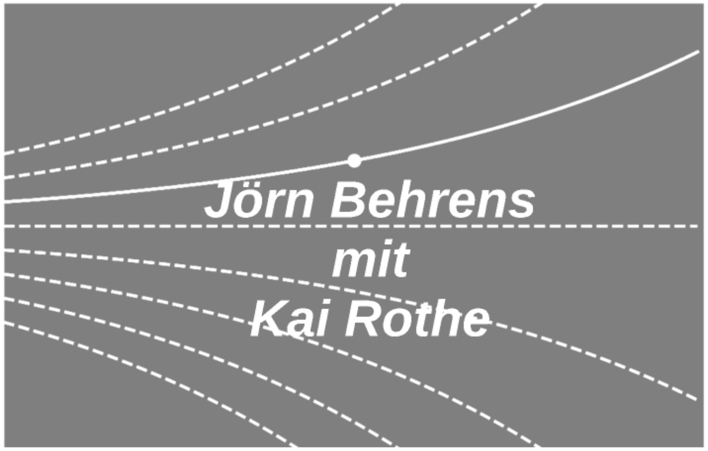
Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

Buch Kapitel 6.7

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Motivation: Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$
$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

  wobei x_1, x_2 Koordinaten des Massepunktes, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lottka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$
$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

  mit x_1, x_2 die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und k_i $(i = 1, \ldots, 4)$ Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\ldots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und $\mathbf{y}$ und $\mathbf{g}$ Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Motivation: Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), && (1)\\
m_2 x_2'' &= k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, && (2)
\end{aligned}
$$

  wobei x_1, x_2 Koordinaten des Massepunktes, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lottka-Volterra Gleichungen)

$$
\begin{aligned}
x_1' &= k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, && (3)\\
x_2' &= k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, && (4)
\end{aligned}
$$

  mit x_1, x_2 die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und k_i $(i = 1, \ldots, 4)$ Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\ldots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und $\mathbf{y}$ und $\mathbf{g}$ Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k-ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
  Idee: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Lösbarkeit

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von $\mathbf{g}$ seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von **g** seien stetig im Intervall $]a,b[$. Sei weiter $x_0 \in]a,b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01},\ldots,y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a,b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Bemerkungen:

- Ein System von n linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt Fundamentalsystem oder Basis von Lösungen.
- Die Elemente der Basis heißen Fundamentallösungen.

Wronski-Matrix
Wronski-Test

Frage: Hätten wir n Lösungen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ gefunden (a_{ij} stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Satz: (Wronski-Test)
Seien $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a, b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Frage: Hätten wir n Lösungen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ gefunden (a_{ij} stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Definition: (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)
Die Wronski-Matrix $Y(x)$ wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n].$$

Weiter definieren wir die Wronski-Determinante des Funktionensystems $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ von Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ als

$$W(x) := \det Y(x)$$

Satz: (Wronski-Test)
Seien $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a, b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Gesamtheit der Lösungen

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)
Durch $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ sei auf $]a, b[$ ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $]a, b[$ schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$\mathbf{y}$ in der obigen Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Die Linearkombinationen sind Lösungen von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, denn mit $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i$ gilt:

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i A(x)\mathbf{y}_i = A(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i = A(x)\mathbf{y}.$$

1

Satz: (Hauptvektorlösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$-Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \ldots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Sytems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Bemerkungen: (Anwendung der Linearen Algebra)

- Matrizen haben nicht immer paarweise verschiedene EWe, Vielfachheit > 1 möglich. Daher: Fundamentalsystem nur konstruierbar, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
- Falls die zum EW λ_k gehörige algebraische Vielfachheit $\sigma_k < n$ mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, so gibt es σ_k linear unabhängige zugehörige EV $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}$, und damit σ_k linear unabhängige Lösungen
$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}.$$
- In diesem Fall lassen sich also zu m verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem)
$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}, \quad (k = 1, \ldots, m),$$
konstruieren, denn $\sum_{k=1}^{m} \sigma_k = n$.

2

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)
Durch $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ sei auf $]a, b[$ ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $]a, b[$ schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$\mathbf{y}$ in der obigen Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Die Linearkombinationen sind Lösungen von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, denn mit $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i$ gilt:

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i A(x) \mathbf{y}_i = A(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i = A(x)\mathbf{y}.$$

1

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Bemerkungen: (Anwendung der Linearen Algebra)

- Matrizen haben nicht immer paarweise verschiedene EWe, Vielfachheit > 1 möglich. Daher: Fundamentalsystem nur konstruierbar, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

- Falls die zum EW λ_k gehörige algebraische Vielfachheit $\sigma_k < n$ mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, so gibt es σ_k linear unabhängige zugehörige EV $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}$, und damit σ_k linear unabhängige Lösungen

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_1}, \ \ldots, \ y_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}.$$

- In diesem Fall lassen sich also zu m verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem)

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_1}, \ \ldots, \ \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}, \quad (k = 1, \ldots, m),$$

konstruieren, denn $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = n$.

2

Satz: (Hauptvektorlösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$-Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \ldots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Sytems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Motivation: Beispiele für Systeme von DGLs sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$
$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

wobei x_1, x_2 Koordinaten des Massepunktes, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lottka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$
$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

mit x_1, x_2 die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und k_i $(i = 1, \dots, 4)$ Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und $\mathbf{y}$ und $\mathbf{g}$ Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} = 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k-ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
  Idee: $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Lösbarkeit

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von $\mathbf{g}$ seien stetig im Intervall $]a,b[$. Sei weiter $x_0 \in]a,b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a,b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a,b[$, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a,b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Bemerkungen:

- Ein System von n linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt Fundamentalsystem oder Basis von Lösungen.
- Die Elemente der Basis heißen Fundamentallösungen.

Differentialgleichungen I

Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

Gesamtheit der Lösungen

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)
Durch $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ sei auf $]a,b[$ ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $]a,b[$ schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} = c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$\mathbf{y}$ in der obigen Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

Wronski-Matrix Wronski-Test

Frage: Hätten wir n Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ gefunden (a_{ij} stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Definition: (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)
Die Wronski-Matrix $Y(x)$ wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2\ \cdots\ \mathbf{y}_n].$$

Weiter definieren wir die Wronski-Determinante des Funktionensystems $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ von Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ als

$$W(x) := \det Y(x)$$

Satz: (Wronski-Test)
Seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a,b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a,b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a,b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.