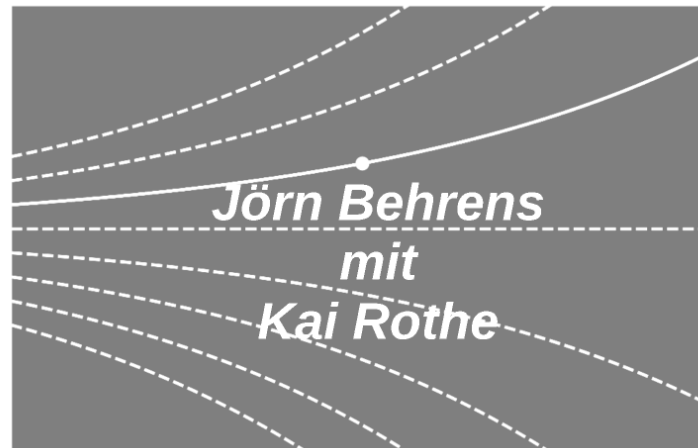


# Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

Buch Kapitel 6.7

# Lineare Systeme von Differentialgleichungen

**Motivation:** Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

wobei  $x_1, x_2$  Koordinaten des Massepunktes,  $m_1, m_2$  die Massen und  $k_1, k_2, k_3$  die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$

$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

mit  $x_1, x_2$  die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

**Definition:** (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die  $a_{ij}(x)$  Funktionen sind, und  $y$  und  $g$  Spaltenvektoren von  $n$  Komponenten, die von  $x$  abhängen.

Ist  $g \equiv 0$ , so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Motivation:** Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

wobei  $x_1, x_2$  Koordinaten des Massepunktes,  $m_1, m_2$  die Massen und  $k_1, k_2, k_3$  die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lottka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$

$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

mit  $x_1, x_2$  die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

**Definition:** (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die  $a_{ij}(x)$  Funktionen sind, und  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{g}$  Spaltenvektoren von  $n$  Komponenten, die von  $x$  abhängen.

Ist  $\mathbf{g} \equiv 0$ , so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Bemerkungen:**

- Differentialgleichungen  $k$ -ter Ordnung lassen sich zu Systemen von  $k$  Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!  
Idee:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $x_3 = y''$ , etc.
- Ist  $n = 1$ , so handelt es sich um eine lineare DGL.

# Lösbarkeit

**Satz:** (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  und die Komponenten von  $\mathbf{g}$  seien stetig im Intervall  $]a, b[$ . Sei weiter  $x_0 \in ]a, b[$  und  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$  beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz  $]a, b[$ .

**Satz:** (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  stetig im Intervall  $]a, b[$ , dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf  $]a, b[$  genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

**Satz:** (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  und die Komponenten von  $\mathbf{g}$  seien stetig im Intervall  $]a, b[$ . Sei weiter  $x_0 \in ]a, b[$  und  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$  beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz  $]a, b[$ .

**Satz:** (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  stetig im Intervall  $]a, b[$ , dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf  $]a, b[$  genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

**Bemerkungen:**

- Ein System von  $n$  linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt **Fundamentalsystem** oder **Basis** von Lösungen.
- Die Elemente der Basis heißen **Fundamentallösungen**.

# Wronski-Matrix

## Wronski-Test

**Frage:** Hätten wir  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  gefunden ( $a_{ij}$  stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

**Satz:** (Wronski-Test)

Seien  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen des Systems  $y' = A(x)y$  auf  $]a, b[$ .

Falls  $a_{ij}(x)$  stetig in  $]a, b[$ , dann gilt

1.  $W(x) \equiv 0$  oder  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .
2. Die Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  bilden ein Fundamentalsystem auf  $]a, b[$  genau dann, wenn  $W(x) \neq 0$ .



**Frage:** Hätten wir  $n$  Lösungen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  gefunden ( $a_{ij}$  stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

**Definition:** (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)

Die **Wronski-Matrix**  $Y(x)$  wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n].$$

Weiter definieren wir die **Wronski-Determinante** des Funktionensystems  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  von Lösungen des Systems  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  als

$$W(x) := \det Y(x)$$

**Satz:** (Wronski-Test)

Seien  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  Lösungen des Systems  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  auf  $]a, b[$ .

Falls  $a_{ij}(x)$  stetig in  $]a, b[$ , dann gilt

1.  $W(x) \equiv 0$  oder  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .
2. Die Lösungen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  bilden ein Fundamentalsystem auf  $]a, b[$  genau dann, wenn  $W(x) \neq 0$ .

# Gesamtheit der Lösungen

**Satz:** (Gesamtheit der Lösungen)

Durch  $y_1, \dots, y_n$  sei auf  $]a, b[$  ein Fundamentalsystem von

$$y' = A(x)y$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung  $y$  auf  $]a, b[$  schreiben in der Form

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad \text{konst. } \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$y$  in der obigen Form heißt auch **allgemeine Lösung** des homogenen Differentialgleichungssystems.

**Bemerkung:** Die Linearkombinationen sind Lösungen von  $y' = A(x)y$ , denn mit  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$  gilt:

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i y_i' = \sum_{i=1}^n c_i A(x)y_i = A(x) \sum_{i=1}^n c_i y_i = A(x)y.$$

1

**Satz:** (Hauptvektorklösungen) Sei  $\lambda$  ein Eigenwert der  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\sigma$  und  $v_1, \dots, v_\sigma$  linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^{\sigma} v = 0.$$

Dann sind

$$y_k = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung  $y' = Ay$ .

**Satz:** (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten) Sei  $A = (a_{ij})$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  ein Eigenwert (EW) von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor (EV)  $v$ . Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung  $y' = Ay$ .

Hat die Matrix  $A$  die  $n$  voneinander verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit zugehörigen EV  $v_1, \dots, v_n$ , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

**Bemerkung:** (Struktur der Lösungen)

- Man kann sich eine gewisse erweiterte EW-Vielmenge  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  wählen. Dieser Fundamentalsystem ist äquivalent, wenn man jede  $\lambda$ -fache algebraische Vielfachheit berücksichtigt.
- Falls die am EW  $\lambda_k$  gehörige algebraische Vielfachheit  $\sigma_k < n$  ist, der gemeinsamen Vielfachen überwiegen, so gibt es  $\sigma_k$  linear unabhängige zugehörige EV  $v_{k1}, \dots, v_{k\sigma_k}$  und damit  $\sigma_k$  linear unabhängige Lösungen  $y_{ki} = e^{\lambda_k x} v_{ki}, \dots, v_{k\sigma_k} = e^{\lambda_k x} v_{k\sigma_k}$ .
- In einem Fall kann es dazu vorkommen, dass  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + i\beta$  mit Vielfachheit  $\sigma_{k+1} = \dots = \sigma_k + 1$  linear unabhängige Lösungen (Prinzipalvektoren)  $v_{k+1} = e^{(\lambda_k + i\beta)x} w_{k+1}, \dots, w_{k+1} = e^{(\lambda_k + i\beta)x} w_{k+1}$  heranzubekommen, denn  $\sum_{i=1}^{\sigma_{k+1}} w_{k+1} = n$ .

2

**Satz:** (Gesamtheit der Lösungen)

Durch  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  sei auf  $]a, b[$  ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung  $\mathbf{y}$  auf  $]a, b[$  schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$\mathbf{y}$  in der obigen Form heißt auch **allgemeine Lösung** des homogenen Differentialgleichungssystems.

**Bemerkung:** Die Linearkombinationen sind Lösungen von  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ , denn mit  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i$  gilt:

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}'_i = \sum_{i=1}^n c_i A(x) \mathbf{y}_i = A(x) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i = A(x) \mathbf{y}.$$

1

**Satz:** (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei  $A = (a_{ij})$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  ein Eigenwert (EW) von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor (EV)  $\mathbf{v}$ .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ .

Hat die Matrix  $A$  die  $n$  voneinander verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit zugehörigen EV  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

## Bemerkungen: (Anwendung der Linearen Algebra)

- Matrizen haben nicht immer paarweise verschiedene EWe, Vielfachheit  $> 1$  möglich. Daher: Fundamentalsystem nur konstruierbar, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
- Falls die zum EW  $\lambda_k$  gehörige algebraische Vielfachheit  $\sigma_k < n$  mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, so gibt es  $\sigma_k$  linear unabhängige zugehörige EV  $\mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}$ , und damit  $\sigma_k$  linear unabhängige Lösungen

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}.$$

- In diesem Fall lassen sich also zu  $m$  verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit Vielfachheiten  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$   $n$  linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem)

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}, \quad (k = 1, \dots, m),$$

konstruieren, denn  $\sum_{k=1}^m \sigma_k = n$ .

2

**Satz:** (Hauptvektorklösungen) Sei  $\lambda$  ein Eigenwert der  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\sigma$  und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$  linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ .



## Lineare Systeme von Differentialgleichungen

**Mathematik**: Integral für Systeme von DGLs mit

• **Zwei Massen-Schwingung**

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - k_2(x_2 - x_1)) - c_1 \dot{x}_1 + f_1(t) \quad (I)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - c_2 \dot{x}_2 + f_2(t) \quad (II)$$

wobei  $m_1, m_2$  Massen der Massenpunkte,  $k_1, k_2$  die Massen und  $k_1, k_2, c_1, c_2$  die Federkonstanten.

• **Beispiel Beutel-System** (Lagrange'sche Gleichungen)

$$\dot{q}' = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \dot{\varphi} r_1 \quad (I)$$

$$\dot{q}' = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\varphi} r_2 \quad (II)$$

mit  $x_1, x_2$  die Axial-Systeme (Fächer, bzw. Beutel) und  $k_1, k_2, c_1, c_2, r_1, r_2$  die Parameter des Beutel-Systems.

**Definition**: Ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

heißt ein **lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** und hat die Form

$$y' = A(x)y + b(x), \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die  $a_{ij}(x), b_i(x)$  Funktionen sind, und  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  die Komponenten, die von  $x$  abhängen.

Es gilt  $y = 0$  ist die **homogene Lösung** des Systems, **inhomogen**  $b(x) \neq 0$ .

**Bezeichnungen**

• Die Differentialgleichungen eines Systems lassen sich in Systemform  $y' = A(x)y + b(x)$  schreiben, wobei  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$  und  $b(x) = (b_i(x))_{i=1,\dots,n}$  sind.

• In  $n=2$  ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL.

## Lösbarkeit

**Satz** (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  und die Komponenten von  $b(x)$  seien stetig im Intervall  $[a, b]$ . Sei weiter  $y_1(x) = (y_{11}, \dots, y_{1n})^T$  beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(a) = y_1$$

genau eine Lösung auf ganz  $[a, b]$ .

**Satz** (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  stetig im Intervall  $[a, b]$ , dann besitzt das homogene System

$$y' = A(x)y$$

auf  $[a, b]$  genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

**Bezeichnungen**

• Ein System von  $n$  linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt **Fundamentalsystem** oder **Basen** von Lösungen.

• Die Elemente der Basen heißen **Fundamentallösungen**.

## Differentialgleichungen I



Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung

## Gesamtheit der Lösungen

**Satz** (Gesamtheit der Lösungen)

Die Funktion  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  ist auf  $[a, b]$  eine Fundamentallösung von

$$y' = A(x)y$$

gilt genau dann, wenn  $y$  die Lösung  $y(x)$  des Systems

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad c_1 + \dots + c_n = 1$$

in der einzigen Form heißt, wobei  $y_1, \dots, y_n$  die **homogenen Differentialgleichungssysteme**.

Bei Differentialgleichung (I) ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL. In diesem Fall ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL. In diesem Fall ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL.

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad c_1 + \dots + c_n = 1$$

Bei Differentialgleichung (II) ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL. In diesem Fall ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL. In diesem Fall ist  $A(x)$  symmetrisch, wenn alle Federhaken DGL.

## Wronski-Matrix Wronski-Test

**Frage**: Können wir  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  gefunden ( $n$ -stetig),

haben sie dann mindestens, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

**Definition** (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)

Die Wronski-Matrix  $W(y_1, \dots, y_n)$  wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$W(x) = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$$

wobei die Zeilen sind die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems  $y_1, \dots, y_n$  von Lösungen des Systems  $y' = A(x)y$ .

$$W(x) = (W_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

**Satz** (Wronski-Test)

Seien  $y_1, \dots, y_n$   $n$  Lösungen des Systems  $y' = A(x)y$  auf  $[a, b]$ .

Falls  $W(x) \neq 0$  stetig in  $[a, b]$ , dann gilt:

1.  $W(x) \neq 0$  oder  $W(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .

2. Die Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  bilden ein Fundamentalsystem auf  $[a, b]$  genau dann, wenn  $W(x) \neq 0$ .