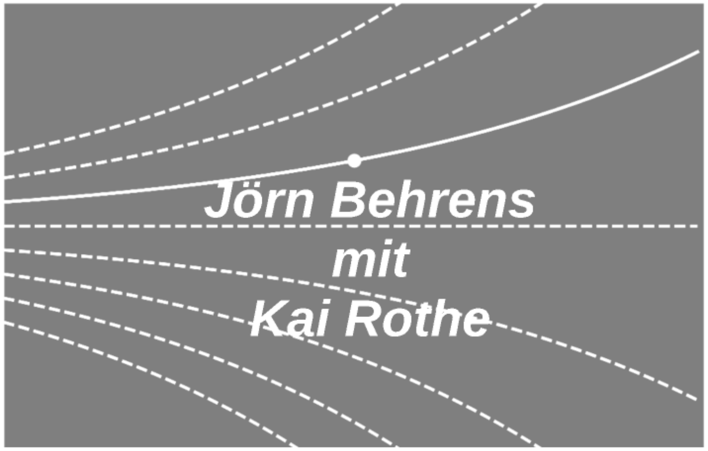
Differentialgleichungen I



Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Buch Kapitel 6.8-6.9

Erinnerung

Zusammenfassung:
Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

   $$y_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, y_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda x}$$

   Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

   $$z_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, z_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, w_r(x) = x^{r-1}e^{\bar{\lambda} x}$$

   komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

   $$\begin{array}{rcl} y_1(x) & = & e^{ax}\cos bx, \ldots, y_r(x) = x^{r-1}e^{ax}\cos bx \\ y_{r+1}(x) & = & e^{ax}\sin bx, \ldots, y_{2r}(x) = x^{r-1}e^{ax}\sin bx \end{array}$$

   reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \ldots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

  $$C_1'(x)y_1^{(k)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

  $$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$:

  $$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

  Bemerkung: Wronksi-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

Zusammenfassung:
Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

   Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

   komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \ldots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \ldots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

   reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \dots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen
$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$
- Außerdem erhalten wir
$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$
- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$:
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

  Bemerkung: Wronksi-Matrix ist regulär, also lösbar!
- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

DGLn mit einfachen Inhomogenitäten

Bemerkung:
Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

Beispiel: (Resonanzfall)
Betrachte ein ungedämpftes Schwingungsproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t).$$

Bemerkung: Falls die Gleichung die Form $y'' + ry' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$, $r > 0$, so erhält man ein gedämpftes System.

- Charakteristisches Polynom ($r = 0$): $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega_0^2$.
- Nullstellen von $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$.
- Allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$.
- Ansatz ($\omega \neq \omega_0$): $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

- Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

Ansätze: (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)
Seien $R_m(x)$, $S_m(x)$, $T_m(x)$, und $Q_m(x)$ Polynome m-ten Grades. Für rechte Seiten der Art

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x)$$

($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

Ansätze für partikuläre Lösungen:

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen Gleichung ist, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x)\sin(\beta x)$ $R_m(x)\cos(\beta x)$	$T_m(x)\sin(\beta x)$ $+Q_m(x)\cos(\beta x)$	
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

2

Beispiel: (Resonanzfall)
Falls $\omega = \omega_0$, dann ist $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ Lösung des homogenen Systems.

- Wähle Ansatz: $y_p(t) = At\cos(\omega t) + Bt\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t).$$

- Man spricht vom Resonanzfall, da die Amplitude von y_p wie t wächst. Die Frequenz ω der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems überein.

Definition: (Resonanz)
Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist,
so spricht man von Resonanz.

Bemerkung:
Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

Ansatz:
Sei $R_m(x)$ ein Polynom m-ten Grades, $m \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Betrachte rechte Seiten der Form

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x).$$

Verwende dann für die partikuläre Lösung den Ansatz nach Art der rechten Seite.

1

Beispiel: (Resonanzfall)
Betrachte ein ungedämpftes Schwingungsproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = K\sin(\omega t).$$

Bemerkung: Falls die Gleichung die Form $y'' + ry' + \omega_0^2 y = K\sin(\omega t)$, $r > 0$, so erhält man ein gedämpftes System.

- Charakteristisches Polynom ($r = 0$): $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega_0^2$.
- Nullstellen von $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$.
- Allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_h(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$.
- Ansatz ($\omega \neq \omega_0$): $y_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t).$$

- Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t).$$

Beispiel: (Resonanzfall)
Falls $\omega = \omega_0$, dann ist $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ Lösung des homogenen Systems.

- Wähle Ansatz: $y_p(t) = At\cos(\omega t) + Bt\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t).$$

- Man spricht vom Resonanzfall, da die Amplitude von y_p wie t wächst. Die Frequenz ω der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems überein.

Definition: (Resonanz)
Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist,
so spricht man von Resonanz.

Ansätze: (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)
Seien $R_m(x)$, $S_m(x)$, $T_m(x)$, und $Q_m(x)$ Polynome m-ten Grades. Für rechte Seiten der Art

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x)$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

Ansätze für partikuläre Lösungen:

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen Gleichung ist, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x)\sin(\beta x)$ $R_m(x)\cos(\beta x)$	$T_m(x)\sin(\beta x)$ $+Q_m(x)\cos(\beta x)$	
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

2

Allgemeine Warnung

Beobachtung: (Struktur der Lösung)

- Homogene lineare DGL n-ter Ordnung hatte genau n linear unabhängige Fundamentallösungen.
- Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form

  $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

  mit $y_h(x)$ Linearkombination der Fundamentallösungen und $y_p(x)$ irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.
- Bislang betrachtet:

  $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x),$$

  wobei $a_n(x) = 1$ angenommen wurde. Ist $a_n(x) \neq 1$, aber $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so kann man o.B.d.A. durch $a_n(x)$ teilen und erhält die bisherige Struktur.
- Falls $a_n(x) = 0$, so ändert sich die Ordnung der DGL und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)
Betrachte die DGL erster Orndung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen): $y_h(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten): $y_p(x) = 1$.
- Allgemeine Lösung: $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)
Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

Warnung: (Struktur der Gleichung)
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (beispielsweise bei DGLn durch differenzieren) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

Beobachtung: (Struktur der Lösung)

- Homogene lineare DGL n-ter Ordnung hatte genau n linear unabhängige Fundamentallösungen.
- Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

  mit $y_h(x)$ Linearkombination der Fundamentallösungen und $y_p(x)$ irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.
- Bislang betrachtet:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x),$$

  wobei $a_n(x) = 1$ angenommen wurde. Ist $a_n(x) \neq 1$, aber $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so kann man o.B.d.A. durch $a_n(x)$ teilen und erhält die bisherige Struktur.
- Falls $a_n(x) = 0$, so ändert sich die Ordnung der DGL und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)
Betrachte die DGL erster Orndung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen): $y_h(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten): $y_p(x) = 1$.
- Allgemeine Lösung: $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)
Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

Warnung: (Struktur der Gleichung)
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (beispielsweise bei DGLn durch differenzieren) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

Erinnerung

Differentialgleichungen I

Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Allgemeine Warnung

Warnung: (Struktur der Gleichung)
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (beispielsweise bei DGLn durch differenzieren) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

DGLn mit einfachen Inhomogenitäten