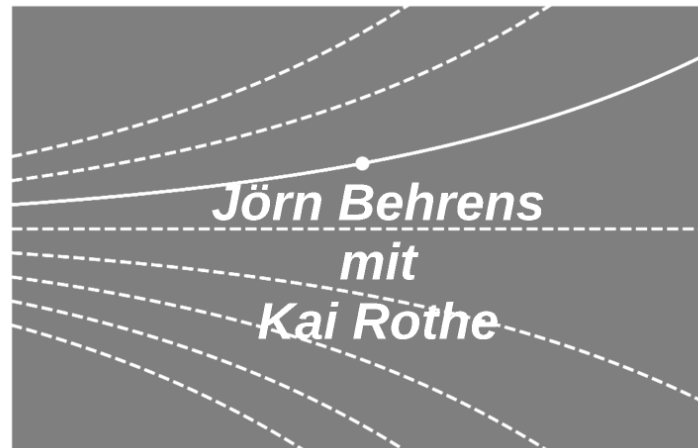


Differentialgleichungen I



Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Buch Kapitel 6.8-6.9

Erinnerung

Zusammenfassung:

Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_i(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \dots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \dots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C'_1(x)y_1^{(k)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C'_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

Zusammenfassung:

Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \dots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n -ter Ordnung)

- Für Gleichung n -ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \dots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

DGLn mit einfachen Inhomogenitäten

Bemerkung:
Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

Ansätze (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)
Seien $R_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$, und $Q_n(x)$ Polynome n -ten Grads. Für rechte Seiten der Art

$$R_n(x), R_n(x)e^{ax}, R_n(x)\sin(\beta x), R_n(x)\cos(\gamma x)$$

$(n, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

Ansätze für partikuläre Lösungen:

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_n(x)$	$T_n(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes
$R_n(x)e^{ax}$	$T_n(x)e^{ax}$	Lösung der homogenen Gleichung
$R_n(x)\sin(\beta x)$	$T_n(x)\cos(\beta x)$	ist, wird der Ansatz n -fach mit
$R_n(x)\cos(\beta x)$	$T_n(x)\sin(\beta x)$	$+Q_n(x)\cos(\beta x)$ multipliziert.
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Nicht kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.
		Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

2

Definition: (Resonanz)

Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist, so spricht man von **Resonanz**.

Beispiel: (Resonanzfall)

Betrachte ein ungedämpftes Schwingungssystem

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t).$$

Bemerkung: Falls die Gleichung die Form $y'' + \alpha y' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$, $\alpha > 0$, ω erfüllt man ein gedämpftes System.

• Charakteristisches Polynom ($r = 0$): $P(r) = r^2 + \omega_0^2$

• Nullstellen von $P(r)$: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

• Allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

• Ansatz ($\omega \neq \omega_0$): $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

• Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

Beispiel: (Resonanzfall)

Falls $\omega = \omega_0$, dann ist $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ Lösung des homogenen Systems.

• Wähle Ansatz: $y_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t).$$

• Man spricht vom **Resonanzfall**, da die Amplitude von y_p wie t wächst. Die Frequenz ω der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems überein.



Bemerkung:

Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

Ansatz:

Sei $R_m(x)$ ein Polynom m -ten Grades, $m \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Betrachte rechte Seiten der Form

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x) \sin(\beta x), \quad R_m(x) \cos(\gamma x).$$

Verwende dann für die partikuläre Lösung den **Ansatz nach Art der rechten Seite**.

1

Beispiel: (Resonanzfall)

Betrachte ein ungedämpftes Schwingungsproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t).$$

Bemerkung: Falls die Gleichung die Form $y'' + ry' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$, $r > 0$, so erhält man ein gedämpftes System.

- Charakteristisches Polynom ($r = 0$): $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega_0^2$.
- Nullstellen von $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$.
- Allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$.
- Ansatz ($\omega \neq \omega_0$): $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

- Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

Beispiel: (Resonanzfall)

Falls $\omega = \omega_0$, dann ist $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ Lösung des homogenen Systems.

- Wähle Ansatz: $y_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t).$$

- Man spricht vom **Resonanzfall**, da die Amplitude von y_p wie t wächst. Die Frequenz ω der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems überein.



Definition: (Resonanz)

Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist,
so spricht man von **Resonanz**.

Ansätze: (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)

Seien $R_m(x)$, $S_m(x)$, $T_m(x)$, und $Q_m(x)$ Polynome m -ten Grades. Für rechte Seiten der Art

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x)$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

Ansätze für partikuläre Lösungen:		
$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen Gleichung ist, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x)\sin(\beta x)$	$T_m(x)\sin(\beta x)$	
$R_m(x)\cos(\beta x)$	$+Q_m(x)\cos(\beta x)$	
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

2

Allgemeine Warnung

Beobachtung: (Struktur der Lösung)

- Homogenes LGS DGL n-ter Ordnung hatte genau n linear unabhängige Fundamentalsystemen.
- Inhomogenes LGS DGL n-ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ mit $y_h(x)$ Linearkombination der Fundamentalsystemen und $y_p(x)$ irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.
- Lösung betrachtet: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$, wobei $a_n(x) = 1$ angenommen wurde. Wobei $a_i(x) \neq 0$, aber $a_i(x) = 0$ für alle $x \in D$, so kann man sich A durch $a_n(x)$ teilen und erhält die folgende Struktur.
- Falls $a_n(x) = 0$, so ändert sich die Ordnung der DGL, und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Betrachte die DGL erster Ordnung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen): $y_h(x) = ce^{-x/2}$.
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten): $y_p(x) = 1$.
- Allgemeine Lösung: $y(x) = ce^{-x/2} + 1$.

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und $y(x) = ce^{-x/2} + 1$ ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

Warnung: (Struktur der Gleichung)
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (beispielsweise bei DGLn durch differenzieren) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

Beobachtung: (Struktur der Lösung)

- Homogene lineare DGL n -ter Ordnung hatte genau n linear unabhängige Fundamentallösungen.
- Inhomogene lineare DGL n -ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

mit $y_h(x)$ Linearkombination der Fundamentallösungen und $y_p(x)$ irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.

- Bislang betrachtet:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x),$$

wobei $a_n(x) = 1$ angenommen wurde. Ist $a_n(x) \neq 1$, aber $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so kann man o.B.d.A. durch $a_n(x)$ teilen und erhält die bisherige Struktur.

- Falls $a_n(x) = 0$, so ändert sich die Ordnung der DGL und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Betrachte die DGL erster Ordnung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen): $y_h(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten): $y_p(x) = 1$.
- Allgemeine Lösung: $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

Warnung: (Struktur der Gleichung)

Bei der Umformung von mathematischen Modellen
(beispielsweise bei DGLn durch differenzieren)
muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

Erinnerung

Definition: Ein lineares Differenzialgleichungssystem (LDS) der Ordnung n ist ein System von n linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' = Ay + b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Homogenes System: $y' = Ay$

Partikuläre Lösung: y_p ist eine Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay + b$.

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$, wobei y_h die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist.

Matrixexponentialfunktion: $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

Fundamentalsystem: $\{y_1, \dots, y_n\}$ ist ein Fundamentalsystem, wenn die Vektoren $y_i(0)$ linear unabhängig sind.

Wronskian: $W(y_1, \dots, y_n)(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$

Abelsche Identität: $W'(t) = -\text{tr}(A)W(t)$

Liouville'sche Formel: $W(t) = W(0) \exp(-\int_0^t \text{tr}(A) dt)$

Stabilität: Ein System $y' = Ay$ ist stabil, wenn alle Eigenwerte von A einen Realteil ≤ 0 haben.



Allgemeine Warnung

Warnung (Struktur der Gleichung)
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (Bsp. in die Form $y' = Ay + b$) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

Beispiel: $y' = y^2$ vs $y' = y$

Warnung: Die Umformung von $y' = y^2$ zu $y' = y$ ist nicht zulässig, da die Lösungsmenge nicht erhalten bleibt.

DGLn mit einfachen Inhomogenitäten

Ansatz: $y_p = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$

Bestimmung der Koeffizienten: Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich.

Beispiel: $y' - y = e^t$

Lösung: $y = C e^t + e^t$

Warnung: Bei der Bestimmung der Koeffizienten muss die Lösungsmenge erhalten bleiben.