Differentialgleichungen I

Woche 10 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

- VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
- GENESENE
- GETESTETE

(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

- FULLY VACCINATED
- RECOVERED
- TESTED

(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

1

Definition: (Differentialausdruck 2. Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $r(x)$ stetige Funktionen. Dann definiere

$$D[y] := a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$$

den Differentialausdruck, der auf I zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ in stetige Funktionen $D[y]$ überführt.

Bemerkungen:

- Betrachte die DGL $D[y] = r(x)$.
- Mit Anfangswerten

  $$y(\xi) = \eta_a, \quad y'(\xi) = \gamma_a, \quad \xi \in I, \; \eta_a, \gamma_a \in \mathbb{R},$$

  existiert nach Satz genau eine Lösung auf I.
- Frage: Was, wenn nicht nur an ξ, sondern auch an einer anderen Stelle Bedingungen gestellt werden?

Beispiel:

- Durchbiegung eines an zwei Punkten aufgehängten Trägers

- Gleichung: $y'' = \underbrace{-C\left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)x}_{r(x)}$

  $C \neq 0, \quad 0 \le x \le l$

- Randbedingungen: $y(0) = y(l) = 0$

- Allgemeine Lösung: $y(x) = -C\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20l^2}\right) + c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Randbedingungen auswerten:

$$0 = y(0) = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$0 = y(l) = -C\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{20}\right) + c_1 l \quad \Rightarrow \quad c_1 = C\,\frac{7}{60}\,l^2$$

- Damit: $y(x) = C\left[\frac{7l^2}{60}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20l^2}\right]$ ist Lösung des Randwertproblems.

- Variation der Randbedingungen:

a) $y'(0) = 0, \quad y(l) = 0$

$$y'(x) = -C\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4l^2}\right) + c_1$$

$$\Rightarrow y(x) = C\left[\frac{7l^2}{60}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20l^2}\right]$$ auch wieder Lösung

b) $y'(0) = 0 = y'(\ell)$

$0 = y'(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 0$.

$0 = y'(\ell) = -C\frac{\ell^2}{4}$ ↯

D.h. $\nexists$ Konstanten C_1, C_2 so dass die DGL die Randbedingungen erfüllt!

2

Bemerkung: (Lineares Gleichungssystem)
Frage: Lösbarkeit der DGL mit Randbedingungen.

- Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\{y_1, y_2\}$ Fundamentalsystem der homogenen DGL $D[y] = 0$ und y_p partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $D[y] = r(x)$.
- Die Ableitung: $y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + y_p'(x)$.
- Damit ergeben sich für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1[c_1y_1(a) + c_2y_2(a) + y_p(a)] + \beta_1[c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) + y_p'(a)] &= \gamma_1 \\ \alpha_2[c_1y_1(b) + c_2y_2(b) + y_p(b)] + \beta_2[c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b) + y_p'(b)] &= \gamma_2 \end{aligned}$$

- Umformen:

$$\begin{aligned} (\alpha_1y_1(a) + \beta_1y_1'(a))c_1 + (\alpha_1y_2(a) + \beta_1y_2'(a))c_2 &= \gamma_1 - \alpha_1y_p(a) - \beta_1y_p'(a) \\ (\alpha_2y_1(b) + \beta_2y_1'(b))c_1 + (\alpha_2y_2(b) + \beta_2y_2'(b))c_2 &= \gamma_2 - \alpha_2y_p(b) - \beta_2y_p'(b). \end{aligned}$$

- Mit den Definitionen für R_1, R_2 und

$$r_1 = \gamma_1 - \alpha_1y_p(a) - \beta_1y_p'(a), \quad r_2 = \gamma_2 - \alpha_2y_p(b) - \beta_2y_p'(b)$$

erhalte lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

- Ist das lineare Gleichungssystem lösbar, so auch die DGL mit Randbedingungen. Also

$$\det\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0!$$

2

Beispiel: $y'' = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$

- Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1x + C_2 + \frac{1}{4}e^{2x}$

$= C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$

- Dabei ist: $y_1(x) = x \quad , \quad y_2(x) \equiv 1$

  $\alpha_k = 1 \quad , \quad \beta_k = 0 \quad , \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 3 \qquad k = 1,2$

- $\Rightarrow$
  $R_1(y_1) = y_1(0) = 0 \qquad v_1 = 1 - y_v(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
  $R_1(y_2) = y_2(0) = 1 \qquad v_2 = 3 - y_v(1) = 3 - \frac{1}{4}e^2$
  $R_2(y_1) = y_1(1) = 1$
  $R_2(y_2) = y_2(1) = 1$

- Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 3 - \frac{1}{4}e^2 \end{pmatrix}$

- Lösung: $c_1 = \frac{1}{4}(9 - e^3) \quad , \quad c_2 = \frac{3}{4}$

- Lösung der DGL:

$$y(x) = \frac{1}{4}(9 - e^2)x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

3

Beispiel: Selbstadjungierter Differentialausdruck für $n = 2$:
Wir hatten schon berechnet:

$$\begin{aligned} D[y] &= a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \\ D^*[y] &= (a_0(x)y)'' - (a_1(x)y)' + a_2(x)y \\ &= a_0(x)y'' + (2a_0'(x) - a_1(x))y' + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))y. \end{aligned}$$

Damit und mit $D^*[y] = D[y]$ folgt:

$$\begin{aligned} 2a_0' - a1 = a_1 \quad &\Rightarrow \quad a_0' = a_1 \\ a_0'' - a_1' + a_2 = a_2 \quad &\Rightarrow \quad a_0'' = a_1'. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$D[y] = (a_0(x)y')' + a_2(x)y.$$

3

- Frage: Sei $D[y] = r(x)$ gegeben.
  Gibt es eine äquivalente DGL mit selbstadjungiertem Differentialausdruck?

- Beobachtung: Multiplikation mit $e^{s(x)}$ ($s(x)$ beliebige diff'bare Fkt.) ändert die Lösungsmenge nicht!

- Also: $D[y] = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r(x)$

$$\Rightarrow \quad e^{s(x)} (a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) = e^{s(x)} r(x)$$

$$\Rightarrow \quad (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)} (a_1 - a_0' - s' a_0) y' + e^{s(x)} a_2 y = e^{s(x)} r(x)$$

- Idee: Wähle s so, dass $(a_1 - a_0' - s' a_0)$ verschwindet

$$\Rightarrow \quad L[y] := (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)} a_2 y = e^{s(x)} r =: z(x)$$

  ist zu $D[y] = r(x)$ äquivalent und selbstadjungiert.

- Setze $p(x) = e^{s(x)} a_0(x)$, $q(x) = e^{s(x)} + a_2(x)$

$$\Rightarrow \quad L[y] = (p(x) y')' + q(x) y$$

  Es gilt: $p(x) \neq 0$ da $a_0(x) \neq 0$, o.b.d.A. allgemein annehmen $p(x) > 0$

- Finde: s, so dass $(a_1 - a_0' - s' a_0) = 0$:

  Wähle $s' = \dfrac{a_1 - a_0'}{a_0}$ bzw. $s(x) \int \dfrac{a_1 - a_0'}{a_0} \, dx$

- <u>Fazit</u>: Mit der Wahl von $s(x)$ ist es immer möglich eine zu $D[y] = r(x)$ äquivalente DGL $L[y] = z(x)$ zu finden mit $L[y]$ selbstadjungiert.