Differentialgleichungen I

Woche 11 / J. Behrens

1

Satz: (Orthogonalität in Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblemen)
Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvillschen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w y = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w y = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ einem Parameter, gelte:

- Für $x \in [a, b]$ sei $p(x)$ stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$ seien stetig.
- Für $x \in]a, b[$ sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$.

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ gehörende nichttriviale Lösungen $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ Orthogonalität, d.h.

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) w(x)\, dx = 0,$$

falls

1. y_1 und y_2 die homogenen Randbedingungen $R_1(y) = 0 = R_2(y)$ erfüllen, d.h. λ_1, λ_2 sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen y_1, y_2 des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a) = p(b) = 0$ erfüllt.

1

Beispiel:

- Betrachte $\boxed{-y'' = \lambda y \; ; \; y(0) = y(\ell) = 0}$, $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$

$\longrightarrow \quad L[y] = y'' \quad , \quad p \equiv 1, \; w \equiv 1, \; q \equiv 0$

- Allgemeine Lösung:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda \neq 0: & y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \\ \lambda = 0: & y(x) = c_1 + c_2 x \end{array}\right\} c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

• Randbedingungen:

$\lambda \leq 0 \Rightarrow$ Es existiert nur die triviale Lösung!

$\lambda > 0 \Rightarrow y_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$, $y_2(x)\ \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ bilden Fundamentalsystem

$\Rightarrow y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Da $y(0)=y(l)=0 \Rightarrow$
$$0 = y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$
$$0 = y(l) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l)$$

$\Rightarrow c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ oder $\sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\, l = \pi k,\ k \in \mathbb{N}$

Diesen Fall schließen wir aus, da sonst $y(x)=0$ triviale Lösung ist.

• Eigenwerte: Es ergeben sich $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ sind Eigenwerte

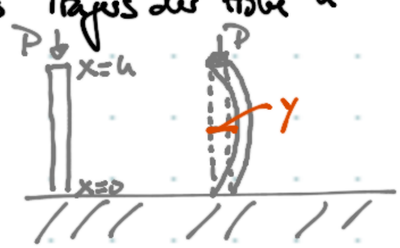
• Eigenfunktionen: $y_k(x) = \sin k\pi \frac{x}{l}$

• Orthogonalität: für $\lambda_k \neq \lambda_j \quad (j \neq k)$

$$\langle y_k, y_j \rangle = \int_0^l \sin(k\pi \tfrac{x}{l}) \sin(j\pi \tfrac{x}{l})\, dx = 0$$

• Anwendung: $-y'' = \lambda y$ mit $y(0) = y(h) = 0$, $\lambda = \frac{P}{B}$

Diese Gleichung beschreibt die Auslenkung eines Trägers der Höhe h in Abhängigkeit der Last (Kraft) P und der Biegefestigkeit B.



• Lösungen : $y_k(x) = c \sin\left(\sqrt{\frac{P}{B}}\, x\right)$ falls $\frac{P}{B} = \frac{k^2\pi^2}{h^2}$

d.h. die Kraft P ist proportional zur Biegefestigkeit B

• Fallunterscheidung:

i) Falls $P < P_1 = B\frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow \lambda = \frac{P}{B} < \frac{\pi^2}{h^2}$

$\Rightarrow$ Es existieren nur triviale Lösungen, also keine Auslenkung.

ii) Falls $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow P_1 = B\frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow y_1(x) = c\sin\left(\frac{\pi}{h}x\right)$

$\rightarrow$ sinusförmige Auslenkung

<u>Bem:</u> P_1 heißt Eulersche Knicklast.

(2) **Satz**: (Entwicklungssatz)
Sei $(y_n(x))$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion $p(x) > 0$ und der Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ auf $[a, b]$ gehören. Es gilt also

$$\langle y_k, y_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion f, die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in $[a, b]$ gleichmäßig und absolut.

2

<u>Beispiel:</u>

• Betrachte : $\boxed{-y'' = \lambda y \,, \quad y(0) = y(\pi) = 0}$

- Eigenwerte : $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$
- Eigenfunktionen : $c \sin(kx)$ $c \neq 0$
- Normiert : $\langle y_k , y_k \rangle = \int_0^\pi c \sin kx \; c \sin kx \, dx = 1$

mit $\int_0^\pi \sin^2 kx \, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$\Rightarrow y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$$

- Reihenentwicklung (Anwendung des Satzes)

$$f(x) \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \qquad (f(0) = f(\pi) = 0)$$

mit $b_k = \langle f, y_k \rangle = \int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \, dx$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$$

d.h. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k \sin kx$

mit $\tilde{b}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$

Das ist gerade die Fourier-Reihe der auf $[0,\pi]$ gegebenen und ungerade fortgesetzten Funktion f mit Periode 2π.