Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man löse das folgende Dirichlet-Problem im Rechteck

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x, y < \pi\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ u(0,y) &= \sin y\,, \quad u(\pi,y) = \sin 2y\,, \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 14:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2+y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0\,,$$

$$u(2,\varphi) = \cos\varphi\,,$$

$$u(3,\varphi) = 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi)\,.$$

Man berechne die Lösung in

a) Polarkoordinaten und

b) kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 15:

Für den Kreis sei das innere Neumannsche Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für} \quad x^2+y^2<R^2\,, \\ \frac{\partial}{\partial r}\,u(R,\varphi) &= v_0(\varphi) && \text{für} \quad \varphi\in[0,2\pi]\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass für die Existenz einer Lösung notwendig $\int\limits_0^{2\pi} v_0(\varphi)d\varphi = 0$ gelten muss und dass die Lösung die folgende Form besitzt

$$u(r,\varphi) \;=\; C \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\,(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi))\,r^k$$

mit einer beliebigen Konstanten $C\in\mathbb{R}$.

b) Man berechne die Lösung für das Beispiel $R=2$ und

$$v_0(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi - 4\cos^3\varphi + 3\cos\varphi$$

zunächst in Polarkoordinaten und wandle diese dann anschließend um in kartesische Koordinaten.

Aufgabe 16:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreis

$$\begin{aligned} r^2u_{rr}+ru_r+u_{\varphi\varphi}=0 \quad &\text{für} \quad 0<r<5 \quad \text{und} \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\,, \\ u(r,0)=0 \quad \text{und} \quad u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad &\text{für} \quad 0\le r\le 5\,, \\ u(5,\varphi)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \quad &\text{für} \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u.

Abgabetermin: 27.5.-29.5. (zu Beginn der Übung)