Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 2\,, && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 50\sin x\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= 2x\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 19:

Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

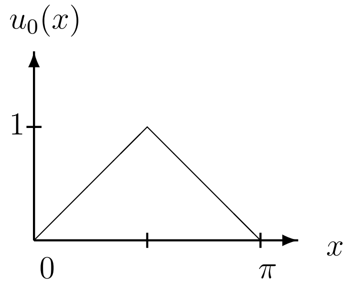
eine Lösung der Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung liefert:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx} & \text{für} \quad 0 < x < \pi\ ,\ 0 < t\ , \\ u(0,t) & = & 0\ =\ u(\pi,t) & \text{für} \quad t \geq 0\ , \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\ , \\ u_t(x,0) & = & 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\ . \end{array}$$



a) Man berechne die Lösung unter Verwendung der d´Alembertschen Lösungsformel und

b) über den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nach Fourier und

c) zeichne die Lösung.

Abgabetermin: 10.6.-12.6. (zu Beginn der Übung)