Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man löse die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 \Delta_3 u \;=\; 0\,, \qquad & \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \quad t > 0\,, \\
u(\boldsymbol{x}, 0) \;=\; u_0(\boldsymbol{x}) \;:=\; z^3\,, \qquad & u_t(\boldsymbol{x}, 0) \;=\; v_0(\boldsymbol{x}) \;:=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

unter Verwendung der Liouvilleschen Lösungsformel

$$
u(\,\boldsymbol{x}\,, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_S u_0(\,\boldsymbol{x}\, + ct\,\boldsymbol{n}\,)\, do \right) + \frac{t}{4\pi} \int\limits_S v_0(\,\boldsymbol{x}\, + ct\,\boldsymbol{n}\,)\, do
$$

mit der Einheitssphäre S im $\mathbb{R}^3$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ auf S.

Anschließend bestätige man durch eine Probe, dass die gefundene Lösung die Anfangswertaufgabe erfüllt.

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t \;&=\; u_{xx} \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; t > 0\,, \\
u(x,0) \;&=\; e^{3x-1} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$
\begin{array}{rcll}
u_t & = & u_{xx} & \text{für} \quad 0 < x < 3\,, \\
 & & & \phantom{\text{für}} \quad 0 < t \leq T\,, \\
u(0,t) & = & 0 \;=\; u(3,t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \\
u(x,0) & = & u_0(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 3\,.
\end{array}
$$

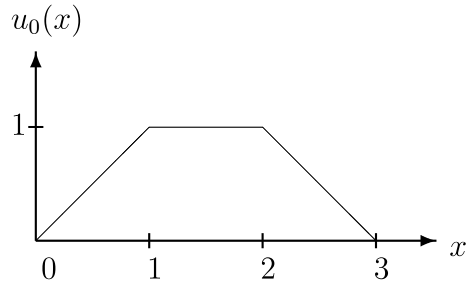

Bild 23 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 24:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$
\begin{array}{rlll}
u_t & = \Delta u & \text{für} & (x,y) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\pi[\,, \quad 0 < t\,, \\
u(0,y,t) & = 0 \;= u(\pi,y,t) & \text{für} & y \in [0,\pi]\,, \quad 0 \leq t\,, \\
u(x,0,t) & = 0 \;= u(x,\pi,t) & & x \in [0,\pi]\,, \quad 0 \leq t\,, \\
u(x,y,0) & = 5\sin 3x \sin 4y & \text{für} & (x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi] \\
 & -8\sin x \cos x \sin y \cos y \quad . & &
\end{array}
$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Abgabetermin: 24.6.-26.6. (zu Beginn der Übung)