

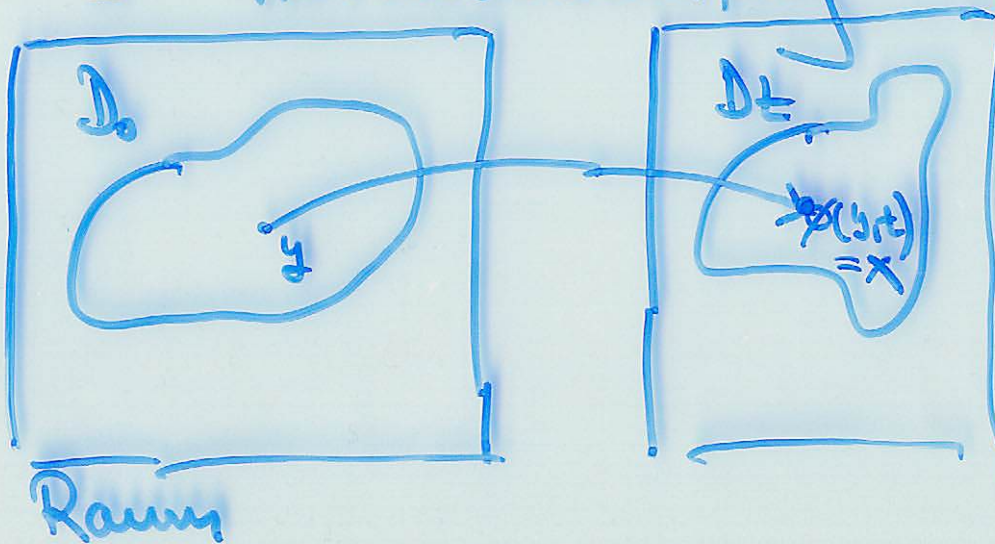
DBL II: Partielle DGLen

Einführung: Warum/wodurch

PDBLen

Modellierung

- Stofftransport
- Wärmeausbreitung



080409

$$D_t := \{ \phi(y,t) ; y \in D_0 \}$$

$$\phi : D_0 \times [0,T] \rightarrow D_t \subset \mathbb{R}^n$$

Beschreibe die Veränderung  
eines Punktes  $y$  mit der Zeit

$$v(\phi(y,t), t) := \frac{\partial}{\partial t} \phi(y,t)$$

Geschwindigkeitsfeld der physikalischen Größe.

Sei  $f(x,t)$  eine physikalische Variable (z.B. Dichte)

$$\text{und } x = \phi(y,t)$$

Erhaltung der physikalischen Variable

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(x,t) dx = 0$$

u Transformationsformel

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\phi(y,t), t) J(y,t) dy = \textcircled{*}$$

mit

$$J(y,t) = \det[D_y \phi(y,t)]$$

Funktionaldeterminante

Dann ist

②

080409

$$\textcircled{*} = \int_{D_0} \frac{d}{dt} [f(\overset{x}{\phi(y,t)}, t) J(y,t)] dy$$

$$= \int_{D_0} \left[ f_t(\phi(y,t), t) + D_x f(\phi(y,t), t) \underbrace{\phi_t(y,t)}_{J(y,t)} \right] dy$$

$$+ f(\phi(y,t)) \frac{d}{dt} J(y,t) dy$$

;- schwer

$$= \int_{D_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}_x (f v) \right] (x,t) dx$$

$$\frac{d}{dt} J(y,t) = 0 \quad \forall D_t$$

?

Euler - Entwicklungsfarmel ③

$$\frac{d}{dt} J(y,t) = \operatorname{div}_x v(x,t) \Big|_{x=\phi(y,t)} J(y,t)$$

Diese benutzen und

$$\operatorname{div}_x (f v) = f \operatorname{div}_x v + v \cdot \nabla_x f(x)$$

liefert Behauptung.

804.09

Folgerung:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(x,t) dx = 0 \quad \forall D_t$$

"

$$\int_{D_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \operatorname{div}_x (f v)(x,t) dx$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \operatorname{div}_x (f v)(x,t) = 0$$

Ist partielle DGL, welche  $f$  und  $v$  in Verbindung setzt