Partielle Differentialgleichungen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

8. April 2009

Beachtenswertes

- Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/
- Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 9.1 – Partielle Differentialgleichung

Definition 9.1: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. Unter einer **partiellen Differentialgleichung** bzw. einem **System PDGLen** für eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}^m$ versteht man ein Gleichungssystem der Form

$$F\left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \ldots, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n^2}, \ldots, \ldots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_1^k}, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_n^k}\right) = 0.$$

Tritt eine der partiellen Ableitungen $k-$ter Ordnung $\frac{\partial^k u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ explizit auf, so sprechen wir von einer PDGL $k-$ter Ordnung. Erfüllt eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ diese Gleichung, so heißt sie **Lösung** der partiellen Differentialgleichung.

Buch Kap. 9.1 – Partielle Differentialgleichungen

Eine PDGL heißt

- linear, falls F affin linear ist in allen Variablen, die Ausdrücke mit u und deren Ableitungen enthalten,
- semilinear, falls F affin linear ist in allen Variablen, die $k-$te Ableitungen von u enthalten und die Koeffizienten nur von x abhängen,
- quasilinear, falls F affin linear ist in allen Variablen, die $k-$te Ableitungen von u enthalten. Die Koeffizienten können dann von x und den Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ von u abhängen.
- nichtlinear, sonst.

Buch Kap. 9.1 – Partielle Differentialgleichungen

Fragen im Zusammenhang mit PDGLen

1) Gibt es überhaupt Lösungen des Problems (Existenzproblem)?
2) Falls es Lösungen gibt, stellt sich die Frage der eindeutigen Bestimmtheit (Eindeutigkeitsproblem).
3) Welchen Einfluss haben kleine Änderungen ("Messungenauigkeiten") in den Rand- und/oder Anfangsdaten auf die Lösung?
4) Welche analytischen und numerischen Methoden gibt es, um Lösungen eines konkreten Problems zu gewinnen?

Buch Kap. 9.1 – PDE Beispiele

- Lineare PDE erster Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x)$$

- Semilineare PDE 2ter Ordnung

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) + c(x, u) = f(x)$$

- Quasilineare PDE 2ter Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u)u_{x_i x_j} + b(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) + c(x, u) = f(x)$$

- Nichtlineare PDE 2ter Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u)u^2_{x_i x_j} + b(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) + c(x, u) = f(x)$$

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

1) Die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x\, u(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t), \;\; \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \;\; t \in [0,\infty[$$

mit vorgegebener Funktion $f(\mathbf{x},t)$ und einer Konstanten $c > 0$ ist eine lineare hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die gesuchte Funktion $u(\mathbf{x},t)$.

Diese Gleichung beschreibt (für $n \leq 3$) Schwingungen und Wellenausbreitungsvorgänge in homogenen Festkörpern und Fluiden und spielt auch bei der Beschreibung elektromagnetischer Felder eine große Rolle. $u(\mathbf{x},t)$ ist dabei die Abweichung der betrachteten physikalischen Größe von einem Bezugswert (z.B. Ruhezustand). c bedeutet die Phasengeschwindigkeit der Wellenausbreitung, $f(\mathbf{x},t)$ beschreibt eine von außen aufgeprägte Anregung.

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

2) Die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial u(\mathrm{x},t)}{\partial t} = a^2 \Delta\, u(\mathrm{x},t) + f(\mathrm{x},t),\ \ \mathrm{x} \in D \subset \mathbb{R}^n,\ \ t \in [0,\infty[$$

ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom parabolischen Typ für die gesuchte Funktion $u(\mathrm{x},t)$.

Diese Gleichung beschreibt (für $n \leq 3$) Diffusionsprozesse, sowie die Verteilung der Temperatur $u(\mathrm{x},t)$ in einem homogenen Festkörper oder in einer ruhenden Flüssigkeit. $f(\mathrm{x},t)$ modelliert vorhandene Stoff- bzw. Wärmequellen, a bezeichnet den Diffusions- bzw. Wärmeleitkoeffizienten.

Empirische Grundlagen

- 1. Fick'sches Gesetzt: Diffusionsstrom $\sim -\nabla u$
- 1. Fourier'sches Gesetz: Wärmestromdichte $\sim -\nabla u$

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

3) Die **Potentialgleichung**

$$-\Delta\, u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

ist eine elliptische Differentialgleichung.

Anwendungen

- Stationäre Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für $t \to \infty$.
- Berechnung elektromagnetischer Potentiale, f modelliert Ladungsquellen
- Geschwindigkeitspotential einer stationären, wirbelfreien Strömung. eines inkompressiblen Fluids.

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

4) **Schwingungsgleichungen**

4.1 Helmholtz Gleichung (aus Wellengleichung abzuleiten)

$$\Delta U(\mathbf{x}) + k^2 U(\mathbf{x}) = -f_0(\mathbf{x}) \quad (k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}) \; .$$

ω Kreisfrequenz einer aufgezwungenen Schwingung.

4.2 Schrödinger Gleichung

$$\Delta \Psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\Psi = 0$$

(μ Masse, E Gesamtenergie des Teilchens, $h = 2\pi\hbar$ Planck'ches Wirkungsquantum). Die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x})$ des Teilchens bestimmt dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit an der Stelle $\mathbf{x}$.

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

5) **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \ \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \ t \in [0, \infty[$$

mit einem gegebenen Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Dichteverteilung $\rho(\mathbf{x}, t)$ eines mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ strömenden kompressiblen Mediums.

Buch Kap. 9.3 – PDE aus der Physik

6) **Maxwell Gleichung** (Gleichungen des elektromagnetischen Feldes)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\
\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\
\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, $t \in [0, \infty[$.

Dabei sind $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ bzw. $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ die magnetische bzw. die elektrische Feldstärke, ϵ (Dielektrizitätskonstante), μ (Permeabilität) und σ (elektrische Leitfähigkeit) nichtnegative Konstanten.