17.01.09

Vertiefung Modellierung mit PDEs

Siehe etwa

Eck / Garcke / Knabner

zu "Mathematical modeling ..."

Insbesondere zur Herleitung des Reynold'schen Transportsatzes

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(x,t)\,dx = \int_{D_t} f_t + \operatorname{div}(f v)\,dx$$

(1)

f physikalische Größe, z.B. Dichte eines Gases bei x zur Zeit t.

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(x,t)\,dx = 0$$ z.Bsp. Massenerhaltung

Reynold-Transportsatz liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \operatorname{div}_x\big(f(x,t)\,v(x,t)\big) = 0$$

$q(x,t) := f(x,t)\,v(x,t)$ Fluß-funktion liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \operatorname{div}_x q(x,t) = 0 \quad (*)$$

17.01.09

(*): Eine Gleichung für 2 Unbekannte

$\rightsquigarrow$ Modelliere q

z.B. mit Hilfe des

1. Fick'schen Gesetzes (Stoff-Konzentr.)
2. Fourier'schen Gesetzes (Temp.)

$$q(x,t) := q(f(x,t), \nabla_x f(x,t), \dots)$$

Bsp: $q(x,t) = a\, f(x,t)$ $\quad a \in \mathbb{R}^n$, a konstant

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \underbrace{\operatorname{div}_x (a\, f(x,t))}_{a \cdot \nabla_x f(x,t)} = 0$$

(2) Diese Gleichung heißt Transportgleichung

Bsp: $q(x,t) := -K \nabla_x f(x,t)$

mit K Konstante bzw allgemeiner, Isotrop

$K = K(x,t) \in \mathbb{R}^{3,3}$ Matrix

Anisotrop

Resultiert aus Modellierung mit Fick'schen oder Fourier'schen Gesetzen.

Anisotrop wichtig etwa bei Komposit - Materialien

1.10.09

Isotrop: Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - K \Delta_x f(x,t) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \equiv 0$:

$$-K \Delta_x f(x) = 0$$

Laplace - Gleichung

Allgemeine Partielle DGL

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial x_1^r}, \frac{\partial^r u}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}, \ldots, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial x_n^r}\right) = 0$$

heißt (System) von partiellen DGLen für $u: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$

③ Typen

1.) F affin linear, so heißt PDE linear

2.) ... s. Folien im Netz

PDEs erster Ordnung

Vorlage: Skript Struckmeier, Material dazu

Quasilineare PDE 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Gesucht: Funktion u

170409

Welche Orte sind für uns im Raum interessant, z.Bsp. charakteristisch für die (lineare) Lösung u?

Sei $t \longmapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ Kurve

Betrachte $u(x(t))$ mit

const $= u(x(t))$. Damit

$$0 = \frac{d}{dt} u(x(t))$$

$$= Du(x(t))\, \dot{x}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i}, \quad \text{falls}$$

$$\dot{x}(t) = a(x(t)) = \begin{bmatrix} a_1(x(t)) \\ \vdots \\ a_n(x(t)) \end{bmatrix}$$

autonomes System

Betrachte zunächst linearen Fall, d.h. lineare PDGL erster Ordnung:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} = 0$$

Dann gilt:

$u(x)$ ist genau dann Lösung, wenn u entlang der Lösung des charakteristischen Systems $\dot{x}(t) = a(x(t))$ konstant ist

170109

Die Lösung $u(x)$ heißt dann „ein erstes Integral" des charakteristischen DGL-Systems

$$\dot{x} = a(x) \, . \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bsp.: $\overset{a_1}{x}\, u_x + \overset{a_2}{y}\, u_y + \underbrace{(x^2+y^2)}_{a_3} u_z = 0$

$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$

Charakteristisches DGL-System

$$\dot{x} = x \qquad ; \quad x(t) = c_1 e^t$$
$$\dot{y} = y \qquad ; \quad y(t) = c_2 e^t$$
$$\dot{z} = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\, e^{2t} + c_3$$

(5) Damit gilt für jede Lösung u:

$$\text{const} = u(x(t), y(t), z(t))$$
$$= u(c_1 e^t,\ c_2 e^t,\ \tfrac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3)$$

Infos aus Char. DGL System

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2}{c_1} =: C$$

Damit und mit

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3$$

ergibt sich

$$z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = c_3 =: D$$

mit Konstanten C und D

170409

const $= u(x,y,z)$

Spezielle Lösung

$G = \frac{y}{x} = u(x,y,z)$

$D = z - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = u(x,y,z)$

Allgemeine Lösung

const $= \phi(G, D) = u(x,y,z)$

$= \phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

mit ϕ beliebig, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1x stetig diffbar.

6

Probe: Lösung

$\phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) = u(x,y,z)$

soll erfüllen

$x u_x + y u_y + (x^2+y^2) u_z = 0$

Test

$u_x = \phi_G \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \phi_D \cdot (-x)$

$u_y = \phi_G \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \phi_D \cdot (-y)$

$u_z = \phi_D$

$\Rightarrow \phi(\ldots)$ Lösung.