240409

PDGL 1. Ordnung

1) Lineare homogene PDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} = 0$$

Charakteristiken (= Kurven, auf denen u konstant ist, d.h. $u(x(t), t) \equiv \text{const}$)

sind gegeben durch die GDGL

$\dot{x} = a(x)$ autonomes DGL System

mit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$,

① denn auf solchen Kurven gilt

$$\frac{d}{dt} u(x(t)) = Du(x(t))\, \dot{x}(t)$$

$$= Du(x(t))\, a(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\, a_i(x) = 0$$

Bsp: $4u_{x_1} + \frac{1}{3x_2^2} u_{x_2} = 0$

Hier $a(x) = \left(4, \frac{1}{3x_2^2}\right)^t$

Char. DGL System

$\dot{x}_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 4t + c_1$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{3x_2^2} \qquad x_2 = \sqrt[3]{t + c_2}$

mit c_1, c_2 Konstanten

240409

Damit

$$u\left(4t+c_1,\ \sqrt[3]{t+c_2}\right) \equiv \text{const}$$

Ferner $t = x_2^3 - c_2$

$$\Longrightarrow \quad x_1 - 4x_2^3 = c_1 - 4c_2 =: c$$

Damit

$$u(x_1, x_2) = \phi(x_1 - 4x_2^3)$$

mit $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig

allgemeine Lösung.

<u>Probe:</u> $u_{x_1} = \phi'(x_1 - 4x_2^3)$

$$u_{x_2} = \phi'(x_1 - 4x_2^3)(-12x_2^2)$$

$$\Longrightarrow 4u_{x_1} + \frac{1}{3x_2^2}u_{x_2} = 0$$

② Bsp: $x_3 u_{x_1} + x_2 u_{x_3} = 0$

$$a(x) = (x_3, 0, x_2)^t$$

Char. DGL

$$\dot{x}_1 = x_3 \qquad x_1 = \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_1$$

$$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_2 = c_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2 \qquad x_3 = c_2 t + c_3$$

Auflösen nach t: $t = \dfrac{x_3 - c_3}{c_2}$

und in Gl. für x_1

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{x_2} + \underbrace{c_1 - \frac{1}{2}\frac{c_3^2}{c_2}}_{=:D}$$

Mit $C := c_2$ ist

$$u(x_1, x_2, x_3) = \phi\left(x_2,\ x_1 - \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{x_2}\right)$$

allgemeine Lösung

240409

mit $\phi = \phi(C, D) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Übertragung der Ideen auf den quasilinearen Fall

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$$

Betrachte für $U(x,u)$ das s.g. erweiterte System

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, U_{x_i} + b(x,u)\, U_u = 0$$

Damit gilt: Ist $U(x,u)$ eine Lsg des erweiterten Systems mit $U_u \neq 0$,

③ So ist durch

$$U(x,u) = 0$$

implizit eine Lösung $u = u(x)$ der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$$

gegeben.

<u>Nachweis</u>: $U(x, u(x)) = 0$ mit $U \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ mit $U_u \neq 0$ liefert

$$0 = D_x 0 = D_x [U(x, u(x))]$$

$$= D_x U(x, u(x)) + D_u U(x, u(x)) D_x u(x)$$

$$\rightarrow \quad D_u U(x, u(x)) D_x u(x) = - D_x U(x, u(x))$$

d.h. $(i = 1, \ldots, n)$ 240409

$$U_u(x, u(x))\, u_{x_i} = -U_{x_i}(x, u(x))$$

U löst das erweiterte System

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\underbrace{U_{x_i}}_{-U_u u_{x_i}} + b(x,u)\, U_u = 0$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-a_i(x,u)\, u_{x_i} U_u\right] + b(x,u)\, U_u = 0$$

$U_u \neq 0$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$$

d.h. u löst Ausgangsproblem!

(4) Bsp: $(1+x_1)u_{x_1} - (1+x_2)u_{x_2} = \underbrace{x_2 - x_1}_{b(x,u)}$

Erweitertes System

$$(1+x_1)U_{x_1} - (1+x_2)U_{x_2} + (x_2 - x_1)U_u = 0$$

Char. DGL

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = 1 + x_1 & x_1 = c_1 e^{t} - 1 \\ \dot{x}_2 = -(1+x_2) & x_2 = c_2 e^{-t} - 1 \end{array}\right\} \text{damit}$$

$$\dot{u} = x_2 - x_1 \qquad u = c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^{t}$$

Wir ermitteln

$$(x_1+1)(x_2+1) = c_1 \cdot c_2 = c$$

$$u = c_3 - (x_2+1) - (x_1+1)$$

$$\longrightarrow \quad D := u + x_1 + x_2$$

$$\longrightarrow \quad U(x_1, x_2, u) = \phi\big((x_1+1)(x_2+1),\ u + x_1 + x_2\big)$$

24.04.09

mit $\phi = \phi(C, D) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Lösungen $u(x)$ der Ausgangsgleichung aus

$$\phi((x_1+1)(x_2+1), \overbrace{u+x_1+x_2}^{u(x)}) = 0$$

durch Auflösen nach u

Hier für $\phi(C, D) \equiv D$

$$u(x) + x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = -(x_1+x_2)$$

und dieses u etwa löst

$$(1+x_1)u_{x_1} - (1+x_2)u_{x_2} = (x_2-x_1)$$

(5) Burgers Gleichung $(x_1 = t, x_2 = x)$

$$u_t + u u_x = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

homogen, quasilinear

Modellierung einer zutdh. Bewegung eines kompressiblen Gases mit Geschw. $u(x,t)$ unter der VA, daß sich ein Teilchen am Ort $x(t)$ mit

$$\dot{x} = u(x,t)$$

beschleunigungsfrei bewegt, d.h.

$$0 = \ddot{x} = \frac{d}{dt} u(x,t) = u_x \dot{x} + u_t$$
$$= u_x u + u_t$$

240409

Lösungen charakterisieren

Gewichtetes System

$$u_t + u\, u_x = 0$$

mit char. DGL

$$\dot{t} = 1 \qquad \cdot \hat{=} \frac{d}{d\tau}$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{u} = 0$$

Damit $t = \tau + c_1$

$u = c_3 =: D$

$\Rightarrow$ $x = c_3 \tau + c_2 = c_3 t \underbrace{- c_3 c_1 + c_2}_{=: c}$

$\Rightarrow$ $x - u t = c$

(6) Damit ist $u(x,t)$ implizit durch

(*) $\phi(x - ut, u) = 0$ mit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

gegeben.

IFT: (*) nach 2ter Variablen auflösbar. Dann

$$u(x,t) = \varphi(x - ut)$$

mit einer zu bestimmenden Funktion φ. Hier beschreibt φ die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$\rightarrow$ Anfangswertaufgaben, Cauchy-Probleme

241109

Die Aufgabe

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u)\, u_{x_i} = b(x,t,u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

heißt Cauchy Problem, $u(x,0) = u_0(x)$

heißt Anfangsbedingung.

<u>Bsp.:</u> Transportgleichung

$$u_t + a \cdot \nabla_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

Char. DGL: $\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$

⊕ OE $t = \tau$

$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + t a$

mit $x_0 = C(c_1, \dots, c_n)^t$ Integrationskonstanten

Charakteristische Kurven

= Geraden in Richtung a

durch x_0 bei $t = 0$.

$x = x_0 + ta \rightarrow x_0 = x - ta$

$u(x_0 + ta, t)$ konstant $\forall t$

$\rightarrow$

$u(x,t) = u(x_0 + ta, t) = u_0(x_0)$

$= u_0(x - ta)$ Lösungsdarstellung!

240409

8

Probe: $u_t = -a\cdot\nabla u_0$

$\nabla_x u_\xi = \nabla u_0$

$\Rightarrow \quad u_t + a\,\nabla_x u = 0$

Bsp: $u_t + tx\,u_x = 0$ in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$

$u(x,0) = u_0(x) = \sin x$

Char. System $\quad \dot t = 1$

$\dot x = tx$

$\Rightarrow \quad x(t) = C_1\, e^{t^2/2}$

$x(0) = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0,$

also

$x(t) = x_0\, e^{t^2/2} \Rightarrow x_0 = e^{-t^2/2}x$

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(x_0) = \sin(x\, e^{-t^2/2})$.