

080509

Notwendige Burgers Gleichung

$$u_t + u u_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

mit $u_0(x_0) := \begin{cases} 1, & x_0 \leq 0 \\ 1-x_0, & 0 < x_0 < 1 \\ 0, & x_0 \geq 1 \end{cases}$

Charakteristik $t \mapsto x(t)$ durch
 $(x_0, 0)$ erfüllt

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

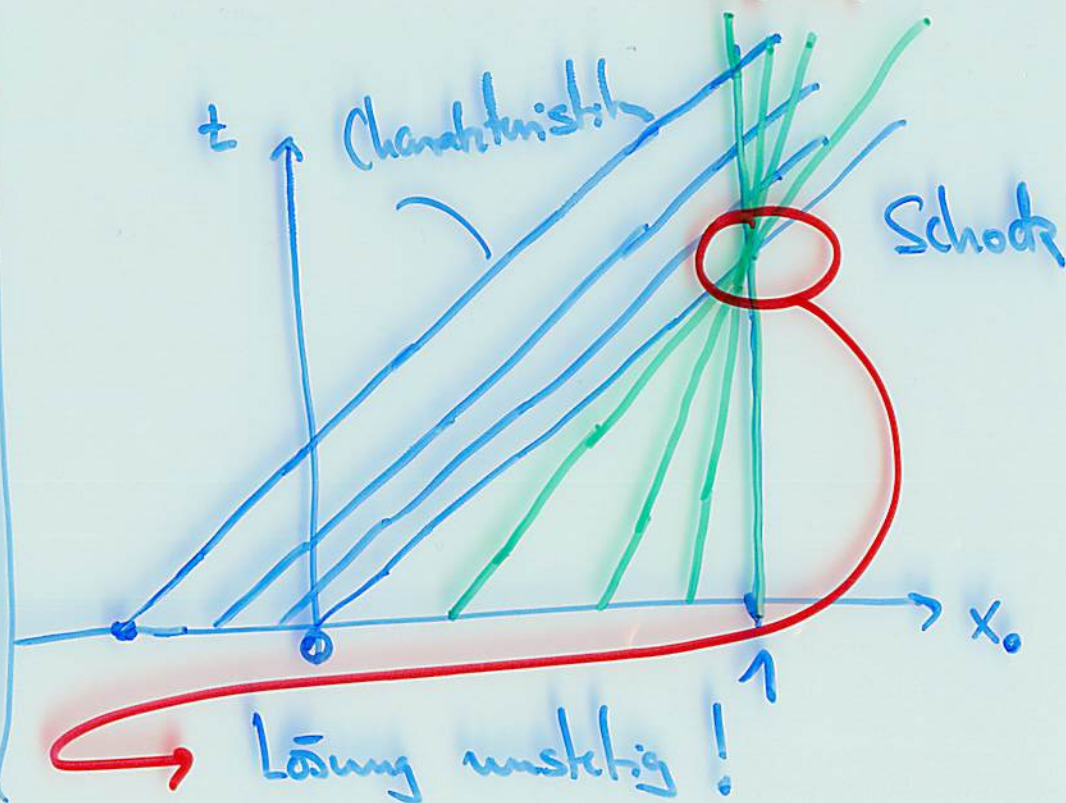
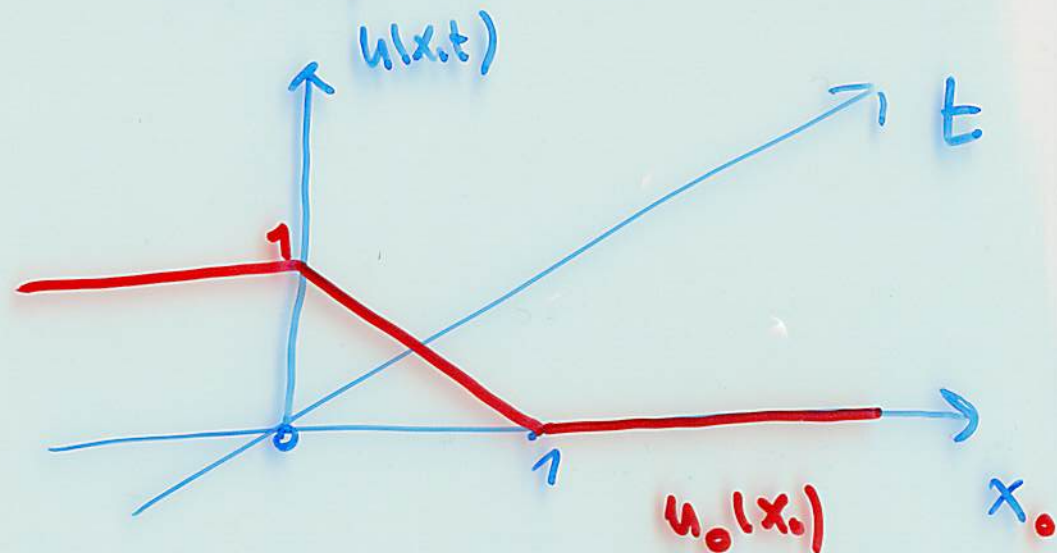
$$\dot{x} = u(x(t), t) = u_0(x_0)$$

weil u auf $x(t)$ konstant

$$\rightarrow x(t) = x_0 + t u_0(x_0)$$

(1)

Verlauf der Charakteristiken



80509

Folgerung: Eine klassische Lösung unseres Cauchy Problems existiert hier nur bis zu einer endlichen Zeit (hier bis $t=1$)

Klassische Lösung für $0 \leq t < 1$:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x_0) = 1, & \text{falls } x-t \leq 0 \\ = 1-x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}, & \text{falls } 0 < \frac{x-t}{1-t} < 1 \\ = 0, & x_0 = x \geq 1 \end{cases}$$

Dabei

$$x_0 = x - t \cdot u_0(x_0) = \begin{cases} x-t & x \leq 0 \\ \frac{x-t}{1-t} & 0 < x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

(2) Ausblick

i.) Skalare Erhaltungsgleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$f(u) = \frac{1}{2} u^2 \rightarrow f(u)_x = u \cdot u_x$$

$\rightarrow$ Burgers Gleichung

ii.) Lösungsbegriff so erweitern, daß unstetige Lösungen auch mit erfasst werden

$\rightarrow$ schwache bzw. variationelle bzw. Integral Lösungen

$\rightarrow$ Selbststudium Skript Studienan.

080509
Lineare Wellengleichung
(zunächst örtlich eindimensional)

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

zzgl $u(x,0) = f(x)$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

mit $u(x,t)$ "Auslenkung" bei
 x zur Zeit t , $c > 0$ "Aus-
breitungsgeschwindigkeit"

i) Lösungsstruktur

$$\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct$$

③ Damit $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$
 $t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$,

also

$$u(x,t) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right) =: v(\xi, \eta)$$

Wir rechnen

$$v_\xi = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2c} u_t$$

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= \frac{1}{4} u_{xx} - \frac{1}{4c} u_{xt} + \frac{1}{4c} u_{tx} - \frac{1}{4c^2} u_{tt} \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \chi(\eta)$$

$\rightarrow$

$$u(x,t) = v(\xi, \eta) = \varphi(x+ct) + \chi(x-ct)$$

$$u_x(x,t) := \varphi'(x+ct), \quad u_t(x,t) = \chi'(x-ct)$$

080509

Anfangswerte einbauen

$$u(x,0) = f(x) = \phi(x) + \chi(x) \quad (1)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = c[\phi'(x) - \chi'(x)]$$

$$\rightarrow \phi(x) - \chi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz \quad (2)$$

(1)+(2)

$$\rightarrow 2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz$$

(1)-(2):

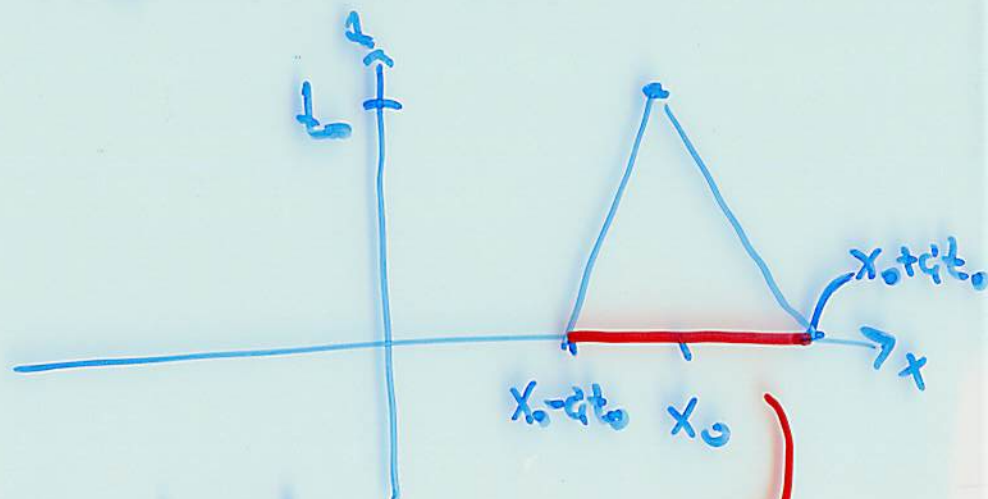
$$2\chi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz$$

Ansatz:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \right]$$

(4)

Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereich

i.) (x_0, t_0) gg. Bestimme $u(x_0, t_0)$ Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ muß man f, g bekannt sein?

Wir benötigen

$$x \in [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$$

Abhängigkeitsbereich (x_0, t_0)

080905

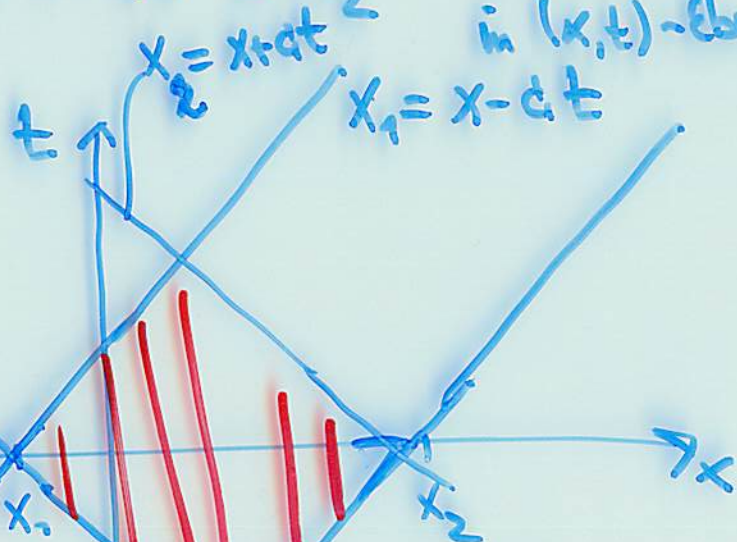
ii) Seien f, g auf $[x_1, x_2]$ gegeben.
Wo ist dann $u(x, t)$ bekannt

Forderung

$$x_1 \leq x + ct \leq x_2 \quad \text{Parallelo-}$$

$$x_1 \leq x - ct \leq x_2 \quad \text{gram-}$$

in (x, t) -Ebene



Bestimmt-
heitsgebiet

⑤

Schwingende Saite

Anfangs- Randwertproblem

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad x \in (0, l) \\ t > 0$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \right\} \text{Anfangswerte}$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} t > 0 \\ \text{Randwerte} \end{array}$$

Modellierung $\rightarrow$ Bärwolf

$$\text{Forderung} \quad \begin{aligned} f(0) &= f(l) = 0 \\ g(0) &= g(l) = 0 \end{aligned}$$

080305

Lösungsansatz: Separation
der Variablen

$$u(x,t) = \bar{x}(x) T(t)$$

DGL liefert damit

$$\bar{x} \ddot{T} = c^2 \bar{x}'' T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{T}}{T}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = c^2 \underbrace{\frac{\bar{x}''}{\bar{x}}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} \quad \forall (x,t)$$

hängt nur von t ab

hängt nur von x ab

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = \underbrace{-\lambda c^2}_{\text{Konstante}} = c^2 \frac{\bar{x}''}{\bar{x}}$$

⑥ Damit

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0,$$

$$\bar{x}'' + \lambda \bar{x} = 0,$$

$$\text{aus } \bar{x}(0) T(t) = \bar{x}(l) T(t) \\ = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \bar{x}(0) = \bar{x}(l) = 0$$

Damit Randwertaufgabe

$$\bar{x}'' + \lambda \bar{x} = 0 \quad \text{in } (0,l)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(l) = 0$$

zu lösen

2. Eigenwertaufgabe