130509

Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

Damit

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz \Big]$$

Sei $\tilde{u}$ Lösung zu $\tilde{f}, \tilde{g}$, wobei $\tilde{f}, \tilde{g}$ Störungen von f bzw g darstellen.

Frage $|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \leq ?$

① Es gilt

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \leq \frac{1}{2}|\tilde{f}(x+ct) - f(x+ct)| + \frac{1}{2}|\tilde{f}(x-ct) - f(x-ct)| + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |\tilde{g}(z) - g(z)|\,dz$$

$$\leq \overbrace{\max_{\kappa} |\tilde{f}(\kappa) - f(\kappa)|}^{\|\tilde{f}-f\|_\infty} + \frac{x_2 - x_1}{2c} \underbrace{\max_{\kappa} |\tilde{g}(\kappa) - g(\kappa)|}_{\|\tilde{g}-g\|_\infty}.$$

Dabei $[x_1, x_2]$ Bestimmtheitsintervall

Merke:

$$\boxed{|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \leq \|\tilde{f}-f\|_\infty + \frac{x_2-x_1}{2c}\|\tilde{g}-g\|_\infty}$$

d.h. u hängt stetig von Daten ab!

13.05.09

Eingespannte Saite führt auf

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad \overbrace{X(0) = X(l) = 0}^{\text{RBen}}$$

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$X(l) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l$ erfüllt für

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{l} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Damit $X_k(x) = c_{2k} \sin\sqrt{\lambda_k}\,x$

Lösung.

Für $T(t)$ erhalten wir

$$T_k(t) = A_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\,t) + B_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\,t)$$

$k \in \mathbb{Z}$.

② Damit erfüllt

$u_k(x,t) = X_k(x)\,T_k(t)$ die Wellengleichung und die Randbedingungen

Setze

$$a_k := A_k c_{2k} \,,\; b_k = B_k c_{2k}$$

Damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{\overbrace{\left[a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\,t) + b_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\,t)\right] \sin(\sqrt{\lambda_k}\,x)}^{u_k(x,t)}}$$

Lösung der Wellengleichung und erfüllt RBen (Das ist nachzuweisen!)

Superposition von Lösungen

130509

Baue AWe ein:

Formal

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x) \overset{!}{=} f(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c\, b_k \sqrt{\lambda_k}\, \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x) \overset{!}{=} g(x)$$

<u>Idee</u>: Setze f, g ungerade über $[0,l]$ hinaus $2l$-periodisch fort. Dann enthalten die zugehörigen Fourierreihen nur "sin"-Terme!

③ Setze also

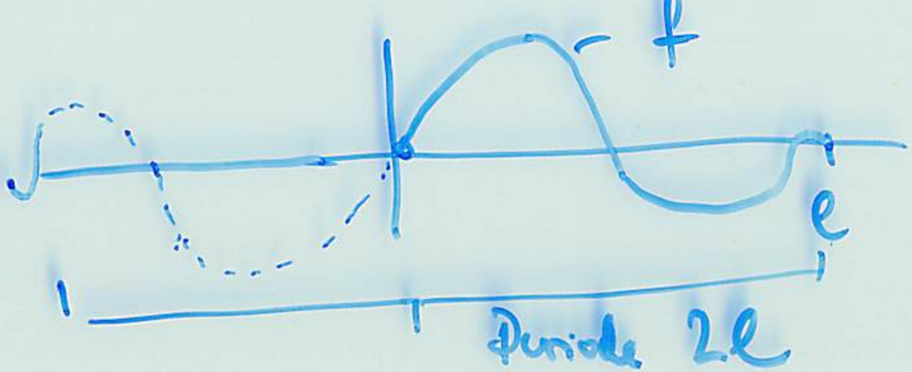
$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)\, dx =: \tilde{a}_k$$

$$c\, b_k \sqrt{\lambda_k} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)\, dx =: \tilde{b}_k$$

Damit löst

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\, t)\right] \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$$

(formal) unsere ARWA.



130509

Theorie der Fourierreihen liefert Abklingverhalten der Koeffizienten (a_k, b_k), falls f, g hinreichend glatt.

Bessel Ungleichung (hier) liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k^{\,2} \le \frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{e}_k^{\,2} \le \frac{2}{l}\int_0^l |g(x)|^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{d}_k,\ \tilde{e}_k \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty)$$

Sei f stetig diffbar

$$a_k(f') = \frac{2}{l}\int_0^l f'(x)\cos\sqrt{\lambda_k}\,x\,dx$$

(4)

$$\overset{\text{p.Int.}}{=} -\frac{2}{l}\sqrt{\lambda_k}\int_0^l f(x)\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\,dx$$

$$= -\sqrt{\lambda_k}\;a_k(f)$$

$\sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi k}{l}$. Also

$$a_k(f') \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow k\,a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

~~Wir benötigen~~: Hinreichend hier: $\tilde{d}_k \le M\frac{1}{k^4}$

und $\tilde{e}_k \le M\frac{1}{k^3}$. Dann

kann $u(x,t)$ 2 mal nach t und 2 mal nach x differenziert werden, und zwar gliedweise.

130509

(5)

2 malige differenzieren liefert nämlich Ausdrücke der Form

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \lambda_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \lambda_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\, t) \right] \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$$

Majorante ist jeg. durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + |b_k| \right) \lambda_k < \infty \qquad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}, \quad a_k \approx \tilde{d}_k, \quad b_k \approx \frac{\tilde{e}_k}{c\sqrt{\lambda_k}}$$

Hinreichende Bedingungen an f, g:

- f 2 mal stetig diffbar & $f^{(3)}$ stckw. stetig
- g 1 mal stetig diffbar & g'' — " —