

150509

Bsp für

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{in } (0, l) \times \mathbb{R}_+$$

$$\textcircled{*} \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

$$\text{mit } c=1 \text{ und } f(x) := \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right),$$

$$g(x) := \sin\left(\frac{4\pi}{l}x\right) \quad (\text{kompatibel})$$

f, g glatt, $2l$ -periodisch mit

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

$$= \delta_{2k}$$

$$c \frac{b\pi}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{4\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

$$= \delta_{4k}$$

④ Damit

$$u(x, t) = \sin\left(c \frac{2\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l} x\right) + \frac{1}{4\pi l} \sin\left(c \frac{4\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{4\pi}{l} x\right).$$

Lösungsweg nach D'Alembert

Idee: Bessere Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \quad \square$$

Zwei Lösung der P.R.W.H. $\textcircled{*}$

Formuliere Bedingungen an f und g in $\textcircled{*}$, so daß $\square$ eingeschränkt auf $(0, l)$ die Aufgabe $\textcircled{*}$ löst.

i.) $g \equiv 0$

150509

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$$

RBen: $u(0,t) = 0 \quad \wedge \quad u(l,t) = 0$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{2} [f(ct) + f(-ct)] \quad \forall t$$

$$\rightarrow f(ct) = -f(-ct) \quad \forall t$$

$\rightarrow f$ sollt ungerade sein

Ferner

$$0 = \frac{1}{2} [f(l+ct) + f(l-ct)]$$

$$\stackrel{f \text{ ungerade}}{=} \frac{1}{2} [f(l+ct) - f(-l+ct)]$$

$$= \frac{1}{2} [f(2l+(-l+ct)) - f(-l+ct)]$$

$$\rightarrow f(-l+ct) = f(2l+(-l+ct)) \quad \forall t$$

② d.h. f sollt 2l-periodisch sein.

$$\text{ii) } f \equiv 0: u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

$$= \frac{1}{2c} [G(x+ct) - G(x-ct)],$$

G Stammfunktion zu g .

$$u(0,t) = 0 = u(l,t)$$

$\rightarrow G$ gerade und 2l-periodisch
d.h. g ungerade und 2l-periodisch

Allgemeine Lösung zu $f \neq 0, g \neq 0$

durch Superposition aus i) und ii)

Bsp: $f(x) = 4x(1-x), g(x) = 0,$
 $x \in [0,1] \quad (l=1), \quad c=1:$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [4(x-t)(1-x+t) + 4(x+t)(1-x-t)]$$

1505 09

Wellengleichung in 3 Raumdimen-

sionen : für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta_x u(x, t)$$

Dabei $\Delta_x u(x) = \sum_{i=1}^3 x_{x_i x_i}(x)$

Laplace - Operator

Koordinaten Transformation

i.) $x = s \cos \varphi$ $y = s \sin \varphi$, $z = z$

Zylinderkoordinaten $s \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,
 $z \in \mathbb{R}$

Si

$$\hat{u}(x, y, z, t) = \hat{u}(s \cos \varphi, s \sin \varphi, z, t) \equiv u(s, \varphi, z, t)$$

③ Transformation der Differential-
 operatoren : ($z_x = 0$, $z_t = 0$)

$$\hat{u}_x = u_s s_x + u_\varphi \varphi_x$$

$$\hat{u}_t = u_t$$

$$s_x = \frac{ds}{dx} \quad , \quad s_y = \frac{ds}{dy} \quad \text{aus}$$

$$1 = \frac{dx}{ds} = s_x \cos \varphi - s \sin \varphi \varphi_x$$

$$0 = \frac{dx}{dy} = s_y \cos \varphi - s \sin \varphi \varphi_y$$

$$1 = \frac{dy}{ds} = s_y \sin \varphi + s \cos \varphi \varphi_y$$

$$0 = \frac{dy}{dx} = s_x \sin \varphi + s \cos \varphi \varphi_x$$

Damit : $s_x = \cos \varphi$ $s_y = \sin \varphi$

$$\varphi_x = \frac{1}{s} \sin \varphi \quad \varphi_y = \frac{1}{s} \cos \varphi$$

150509
Analog mit 2ten Ableitungen.

Nach "langer" Rechnung ergibt sich

$$u_{tt} = c^2 \left[\underbrace{u_{ss} + \frac{1}{s} u_s + \frac{1}{s^2} u_{\varphi\varphi}}_{\frac{1}{s} (s u_s)_s} + u_{zz} \right]$$

Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

u Lösung $\Rightarrow$

$$\hat{u}(x, y, z, t) = u(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}, z, t)$$

i) Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

(9)

$$z = r(\theta) \varphi \quad \text{mit } r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Wieder } \hat{u}(x, y, z, t) =: u(r, \theta, \varphi, t)$$

Wellengleichung in Kugelkoordinaten

$$u_{tt} = c^2 \left[\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta \right]$$

Zylinder- und Kugelwellen

i.) Suche Lösungen $u = u(s, t)$, d.h.
 u unabhängig von φ und z (d.h. $\sin \theta$)
(Darstellung in Zylinderkoordinaten)

150509

Wellengleichung dann

$$u_{tt} = c^2 \frac{1}{s} (s u_s)_s, \quad s > 0, \quad t > 0.$$

Separationsansatz

$$u(s, t) = T(t) R(s)$$

Damit in DGL für alle t, s

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{R''(s) + \frac{1}{s} R'(s)}{R(s)}$$

$$\equiv \text{const} := -\lambda c^2$$

Damit

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0, \quad R'' + \frac{1}{s} R' + \lambda R = 0$$

⑤ Setze $y(s\sqrt{\lambda}) := R(s)$. Dies liefert

$$y''(s\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{s\sqrt{\lambda}} y'(s\sqrt{\lambda}) + y(s\sqrt{\lambda}) = 0$$

 $x = s\sqrt{\lambda}$, Mult mit x^2
 $\rightarrow$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

gewöhnliche DGL, die s.g. Bessel -
DGL 0-ter Ordnung

Fundamentalsystem durch

$$J_0(x), \quad Y_0(x)$$

(Besselfunktionen 0-ter Ordnung erster
bzw. 2ter Art) $\rightarrow$ Literatur, Buch Bärwolff