

150509

Lösungen der 3-d Wellengleichung
in Kugelkoordinaten, welche
unabhängig von φ und θ sind:

$$u_{tt} = c^2 \left[u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right] \quad | \cdot r$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2(u \cdot r)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2(u \cdot r)}{\partial r^2},$$

d.h. $w(r,t) := r u(r,t)$ erfüllt

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$$

Damit

$$w(r,t) = \underbrace{\cancel{\varphi(r+ct)}}_{\text{nach links}} + \underbrace{\chi(r-ct)}_{\text{nach rechts}}$$

mit Funktionen φ, χ

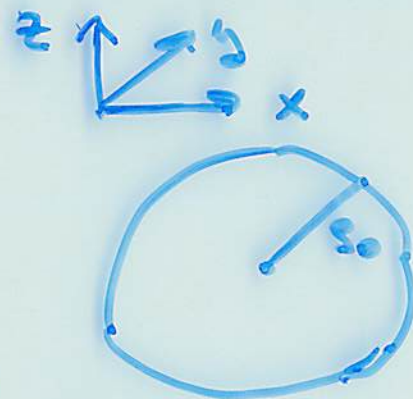
① Damit

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \chi(r-ct)$$

mit r abhängende Welle

Kreisförmige Membran mit Radius s_0

Lösungen in
Zylinderkoordinaten



$$\left. \begin{aligned} u(s, \varphi, 0) &= f(s, \varphi) \\ u_t(s, \varphi, 0) &= g(s, \varphi) \end{aligned} \right\} \text{AWC}$$

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \frac{1}{s} (s u_s)_s + \frac{1}{s^2} u_{\varphi\varphi}$$

$$u(s_0, \varphi, t) = 0 \quad \text{Randbedingung.}$$

290509

und Kompatibilität

$$f(s_0, \varphi) - g(s_0, \varphi) = 0$$

$$\varphi \in [a, 2\pi].$$

Ansatz: $u(s, \varphi, t) = T(t) w(s, \varphi)$

Dann in DGL. Dann ergibt sich

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0$$

$$\rightarrow T(t) = A \cos(c\sqrt{\lambda} t) + B \sin(c\sqrt{\lambda} t)$$

Ferner erfüllt w

$$\frac{1}{s} (s w_s)_s + \frac{1}{s^2} w_{\varphi\varphi} + \lambda w = 0$$

$$0 < s < s_0$$

$$w(s_0, \varphi) = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

② und $w(s, \varphi + 2k\pi) = w(s, \varphi), k \in \mathbb{Z}$
 $0 < s < s_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Ansatz für w : $w(s, \varphi) = R(s) F(\varphi)$
 mit $\alpha \geq 0$

$$\Rightarrow F''(\varphi) + \alpha F(\varphi) = 0,$$

$$F(\varphi + 2k\pi) = F(\varphi)$$

$$\rightarrow \alpha = k^2$$

$$\rightarrow F(\varphi) = a \cos(k\varphi) + b \sin(k\varphi)$$

Für R ergibt sich mit $R(s_0) = 0$

$$\frac{1}{s} (s R')' + \left(\lambda - \frac{k^2}{s^2} \right) R = 0$$

Setze $y(\sqrt{\lambda} s) = R(s)$
 $=: x$

$$\Rightarrow x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0$$

Bessel DGL

n-ter
Ordnung

29.5.03

FS gegeben durch

 J_n und Y_n (Bessel Funktion)

n-ter Ordnung erster bzw. 2ter Art)

 $\rightarrow$ Bärwolff für weiteres Studium.

Weitere Hinweise

i) Lösungen der Wellengleichung
durch sphärische Mittelung

$$\textcircled{*} \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

③

$$M_r[u](x_0) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x, t) d\sigma(x)$$

ist sphärisches Mittel von u auf
 $\partial B_r(x_0)$.Satz: Löst $u \in \mathcal{D}$, so löst $w(t, t) := t \cdot M_r[u](x_0)$ die
eindimensionale Wellengleichung

$$w_{tt} = c^2 w_{rr}$$

Satz (nach Liouville): $\mathcal{D}$ besitzt genau
eine Lösung, welche gegeben ist durch

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot M_{ct}[g](x)) + t \cdot M_{ct}[h](x).$$

29.05.03

Potentialgleichung ($n=2,3$)

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Dabei f gegeben und

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) \\ = \operatorname{div}(\nabla u(x))$$

Namensgebung: Poisson-Gleichung,
bzw. Laplace-Gleichung ($f=0$).

Schlecht gestellt mit den RW/PA
nach Hadamard (in 2d)

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad u(x,0) = g(x), \quad u_y(x,0) = h(x) \quad \Bigg| \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u_n(x,y) = \infty, \quad \text{wird beliebig groß.}$$

④ $h=0=g \rightarrow u \equiv 0$ Lösung
Stör. Daher $h=0, g=0$ gemäß

$$g_n(x) = 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

Offensichtlich: $g_n = g \quad \forall n$ und

$$|h_n - h| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \text{ d.h.}$$

g_n, h_n für n groß "kleine Störungen"
von g und h .

Lösung $u_n(x,y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$

mit $u_n(x,0) = 0$ und

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_{n,y}(x,0) = \lim_{y \rightarrow \infty} h_n(x) = 0.$$

Sei $y > 0$. Damit

d.h. Lösung

wird beliebig groß.

29.05.03

Begriffe

Dirichlet RWF für das Poisson Problem lautet (D offenes Gebiet)

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ in } D \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(x) = g(x) \text{ auf } \partial D$$



Neumann RWF

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ in } D$$

$$\partial_\eta u(x) = g(x) \text{ auf } \partial D$$

Dabei mit η = äussere Normale

an ∂D : $\partial_\eta u(x) := \nabla u(x) \cdot \eta$

Beachte: f und g müssen hier kompa-

⑤ Libel sein, dann

$$\int_D -\Delta u(x) dx \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial D} -\partial_\eta u(x) d\sigma(x)$$

$$\int_D \bar{f}(x) dx \stackrel{!}{=} \int_{\partial D} -g(x) d\sigma(x)$$

Spezielle Lösungen : Laplace auf Rechteck. Betrachte Dirichlet Problem

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{in } (a,a) \times (0,b)$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$u(a,y) = g(y), \quad u(0,y) = 0 \quad 0 \leq y \leq b$$

Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ in $D \setminus L$

liefert $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{const} := -\alpha^2$

290509

mit $Y(0) = Y(b) = 0 \rightarrow$ Eigenwert-
aufgabe mit Eigenlösungen

$$Y_k(y) = C_k \sin(k_k y), \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{b},$$

Für $\bar{X}$ erhalten wir

$$\bar{X}_k'' - \alpha_k^2 \bar{X}_k = 0,$$

mit $\bar{X}_k(a) = 0$ und $\bar{X}_k(b) = g(y)$
ergibt sich

$$\bar{X}_k(x) = D_k \sinh(\alpha_k(x-a))$$

Superposition:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(\alpha_k(x-a)) \sin(k_k y)$$

⑥

Für

$$g(y) = u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\sinh(-\alpha_k a)}_{=: \beta_k} \sin(k_k y)$$

Setze g $2b$ -periodisch ungerade
fort. Dann

$$\beta_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(k_k y) dy$$

und damit u vollständig bestimmt.