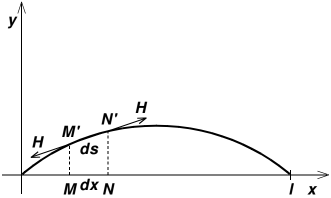
Partielle Differentialgleichungen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

13.,15. und 29. Mai 2009

Transversalschwingungen einer Saite



Eingespannte Saite

Anfangs- Randwertaufgabe für Auslenkung $u(x,t)$ bei x zur Zeit t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ für } x \in (0,l), t > 0,$$

mit Einspann- (Rand-) Bedingungen

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ für } t > 0,$$

und Anfangsbedingungen für Auslenkung und Geschwindigkeit

$$u(x,0) = f(x)\ , \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \text{ für } x \in (0,l)$$

mit $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$ (Verträglichkeitsbedingungen).

Produktansatz nach Fourier

Suche Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Damit in die PDGL liefert

$$X(x)\ddot{T}(t) = c^2 X''(x)T(t) \Longrightarrow \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ falls } X, T \neq 0.$$

Rechte Gleichung gilt für alle x, t. Also müssen Quotienten konstant sein. Mit der Konstanten $\beta^2 c^2$ ergeben sich 2 DGLen

$$(a) \quad \ddot{T} + \beta^2 c^2 T = 0 \qquad (b) \quad X'' + \beta^2 X = 0.$$

mit Randbedingungen $X(0) = X(l) = 0$. Dies führt auf ein Eigenwertproblem für X mit Eigenwerten $\beta_n^2 = (\frac{n\pi}{l})^2$ $(n \in \mathbb{N})$ und Eigenfunktionen

$$X(x) = X_n(x) = c_{2n} \sin(\beta_n x).$$

Produktansatz - Superposition

Die allgemeine Lösung der DGL (a) für β_n ist damit

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos(c\beta_n t) + B_n \sin(c\beta_n t)$$

mit zunächst beliebigen $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Mit $A_n c_{2n} = a_n$, $B_n c_{2n} = b_n$ erhalten wir für $n = 1,2,\ldots$ ∞-viele partikuläre Lösungen

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = [a_n \cos(c\beta_n t) + b_n \sin(c\beta_n t)] \sin(\beta_n x)$$

der Ausgangsaufgabe, wobei die Anfangsbedingungen dabei noch nicht berücksichtigt wurden.
Superposition liefert die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(c\beta_n t) + b_n \sin(c\beta_n t)] \sin(\beta_n x).$$

Wir geben die Koeffizienten a_n und b_n einfach an und zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an f und g diese Reihe konvergiert.

Fourierreihen

Wir setzen

$$a_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin(\beta_n\xi)\,d\xi \text{ und } c\beta_n b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi)\sin(\beta_n\xi)\,d\xi$$

und erhalten so die Fourierreihen der ungerade über $[0, l]$ hinaus $2l$-periodisch fortgesetzten Funktionen f und g zu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) \text{ und } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c\beta_n b_n \sin(\beta_n x).$$

Forderungen:

- Die ungerade, $2l$-periodische Fortsetzung der auf $[0, l]$ gegebenen Funktion $f(x)$ ist überall zweimal stetig differenzierbar und die 3. Ableitung ist noch stückweise stetig.
- Die ungerade, $2l$-periodische Fortsetzung von $g(x)$ ist für alle x stetig differenzierbar und hat noch eine stückweise stetige zweite Ableitung.

Für die Koeffizienten gilt dann (s. Fourier Reihen, Bessel Ungl.)

$$a_n = O(n^{-4}) \text{ und } c\beta_n b_n = O(n^{-3}) \text{ bzw. } b_n = O(n^{-4}) \text{ für } n \to \infty.$$

Lösung der Wellengleichung

Mit den genannten Voraussetzungen ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(c\beta_n t) + b_n \sin(c\beta_n t)] \sin(\beta_n x).$$

dann gliedweise differenzierbar und löst die Anfangs-Randwertaufgabe für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung.

Bsp.: Mit

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\frac{2\pi}{l}x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sin(\frac{4\pi}{l}x)$$

gilt

$$u(x,t) = \sin(c\frac{2\pi}{l}t + \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{2\pi}{l}x) + \frac{l}{4\pi l} \sin(c\frac{4\pi}{l}t) \sin(\frac{4\pi}{l}x).$$

Nur die Koeffizienten a_2 und b_4 sind von Null verschieden.

AWP für die Wellengleichung in $\mathbb{R}$

Def. 9.3: $f(x)$ sei auf $\mathbb{R}$ zweimal, $g(x)$ auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar. Gesucht ist eine für $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ definierte Funktion $u(x, t)$, die für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

genügt und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Satz 9.1: Das Anfangswertproblem aus Def. 9.3 hat genau eine Lösung. Diese hängt stetig von den Anfangsdaten ab. Sie ist sogar für $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^2)$ definiert und durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi]$$

gegeben.

Stetige Abhängigkeit der Lösung von f und g: Seien $u, \tilde{u}$ die Lösungen zu f, g bzw. $\tilde{f}, \tilde{g}$. Dann gilt

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \|f - \tilde{f}\|_\infty + \frac{x_2 - x_1}{2c}\|g - \tilde{g}\|_\infty,$$

wobei $[x_1, x_2]$ das Bestimmtheitsintervall $x_1 \leq x + ct \leq x_2$, $x_1 \leq x - ct \leq x_2$ bezeichnet.

Kleine Störungen in den Daten f, g bewirken also nur kleine Störungen in der Lösung.

Wellengleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Interessiert man sich für Lösungen der Wellengleichung in beschränkten zylindrischen bzw. kugelförmigen Gebieten oder für Lösungen mit Zylinder- oder Kugelsymmetrie in $\mathbb{R}^3$, so bietet sich ein Übergang zu Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten an.

Zylinderkoordinaten: $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$, $(\rho \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ -\infty < z < \infty)$,

Wellengleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Big[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big].$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$; $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0,2\pi]$.

Wellengleichung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)\Big].$$

Zylinder- und Kugelwellen

Lösungen $u(\rho, t)$ (unagbängig von z, ϕ) der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten erfüllen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}).$$

Lösungsansatz: Trennung der Veränderlichen $u(\rho, t) = T(t)R(\rho) \rightarrow$ Lösungsdarstellung mit Besselfunktionen $0-$ter Ordnung.

Lösungen $u(r, t)$ (unagbängig von θ, ϕ) der Wellengleichung in Kugelkoordinaten erfüllen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 [\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}].$$

Beobachtung: $w(r, t) := ru(r, t)$ erfüllt $w_{tt} = c^2 w_{rr}$, also die eindimensionale Wellengleichung. Ergo mit einer Welle ψ (nur rechtslaufende Wellen sinnvoll, weil $r \geq 0$)

$$ru(r, t) = w(r, t) = \psi(r - ct) \Longrightarrow u(r, t) = \frac{1}{r}\psi(r - ct).$$

Auslenkung wird mit wachsendem r gedämpft.

Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Wähle Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z. Die kreisförmige Membran vom Radius ρ_0 sei an ihrem Rand $(\rho, \phi, z) = (\rho_0, \phi, 0)$, $\phi \in [0,2\pi]$, fest eingespannt. Auslenkung in Richtung der z-Achse zur Zeit t sei $u(\rho, \phi, t)$. Anfangsauslenkung $u(\rho, \phi, 0) = f(\rho, \phi)$, Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) = g(\rho, \phi)$. Gesuchte Funktion $u(\rho, \phi, t)$ unabhängig von z.

Wir erhalten

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(\rho, \phi, 0) = f(\rho, \phi) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) = g(\rho, \phi)$$

$$u(\rho_0, \phi, t) = 0 \ ,$$

und fordern die Verträglichkeitsbedingung $f(\rho_0, \phi) = g(\rho_0, \phi) = 0$, $(\phi \in [0,2\pi])$. Ferner f, g und u sollen 2mal stetig diffbar und 2π-periodisch in ϕ sein.

Trennung der Variablen $\longrightarrow$ Besselfunktionen $n-$ter Ordnung.