Eigenschaften harmonischer Funktionen 14.06.09

Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^0(\bar{D})$ heißt harmonisch in D, falls

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in D$$

Erinnerung: $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$

<u>Zunächst</u>: $D \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet, offen beschränkt,

φ sei auf $\bar{D}$ 2x stetig diffbar

Sei ferner

$$f(x) := \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{1}{r(x)} \qquad x \neq x_0$$

Dann gilt $\Delta f(x) = 0$

(1) Erinnerung (letzte Folie Ana III)

2te Green'sche Formel $\varphi, \tilde{f}$ geeignet

$$\int_D \varphi \Delta \tilde{f} - \tilde{f} \Delta \varphi \, dx$$

$$= \int_{\partial D} (\varphi \partial_\eta \tilde{f} - \tilde{f} \partial_\eta \varphi) \, d\sigma$$

Nachweis über

$$\operatorname{div}(v \vec{F}) = \nabla v \vec{F} + v \operatorname{div} \vec{F}$$

kombiniert mit Gauß

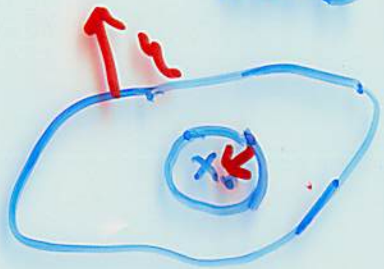
$$\int_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \eta \, d\sigma$$

Anwendung mit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\bar{D})$ und f geht zunächst nur in

$$D \setminus K_\varepsilon(x_0)$$

11.06.09

Damit ($f(x) = \frac{1}{r}$)



$$\int_{D \setminus K_\varepsilon(x_0)} \varphi \underbrace{\Delta f}_{=0} - f \, \Delta \varphi \, dx$$

$$= \int_{\partial D} \varphi \, \partial_\nu \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \partial_\nu \varphi \, d\sigma$$

$$+ \int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} \varphi \, \partial_\nu \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \partial_\nu \varphi \, d\sigma$$

Was passiert für $\varepsilon \to 0$

Es gilt: $\partial_\nu \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Damit

$$\int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} \varphi \, \partial_\nu \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

Mittelwert von φ über $\partial K_\varepsilon(x_0)$

$$\underset{\text{Oberflächen Integrale}}{\overset{\text{MWS}}{=}} \frac{1}{\varepsilon^2} \, 4\pi\varepsilon^2 \, \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} \varphi \, d\sigma$$

②

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 4\pi \varphi(x_0).$$

Ferner

$$\int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{r} \partial_\nu \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \, 4\pi\varepsilon^2 \, \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} \partial_\nu \varphi \, d\sigma$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Zsgefasst für $\varepsilon \to 0$

$$\boxed{4\pi \varphi(x_0) = \int_{\partial D} \frac{1}{r} \partial_\nu \varphi - \varphi \, \partial_\nu \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma - \int_D \frac{1}{r} \Delta \varphi \, dx}$$

Wie sieht das für harmonisches φ aus?

110603

③ $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \int_D \frac{1}{r}\Delta\varphi\, dx = 0$

Sei $D = K_{r_0}(x_0)$, r_0 fix.

Dann gilt für φ harmonisch in $K_{r_0}(x_0)$:

$$\varphi(x_0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r_0^2}\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \varphi\, d\sigma}_{\text{Mittelwert von } \varphi \text{ über } \partial K_{r_0}(x_0)}$$

Mittelwert-Eigenschaft.

Nachweis: $D = K_{r_0}(x_0) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}$ auf $\partial K_{r_0}(x_0)$

$$\partial_\nu\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r_0^2} \quad \text{auf } \partial K_{r_0}(x_0)$$

Ferner für φ harmonisch

$$0 = \int_D \Delta\varphi(x)\, dx = \int_{\partial D} \partial_\nu \varphi\, d\sigma$$

Damit

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \frac{1}{r}\partial_\nu u\, d\sigma = \frac{1}{r_0}\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \partial_\nu u\, d\sigma$$

$= 0. \rightarrow$ Bh.

Folgerungen

i.) Maximum (Minimum) Prinzip

Sei u stetig in $\bar{D}$ und harmonisch in D. Dann nimmt u sein Max

12.06.05

und sein Min auf dem Rand ∂D an.

<u>Nachweis</u> i) Mit Mittelwerteigenschaft in Übung.

ii) analytischer Nachweis. Sei $P_0 \in D$ mit $u(P_0) = \max_{x \in \bar{D}} u(x)$

Dann $\nabla u(P_0) = 0$ <u>und</u> $\text{Hess}\, u(P_0)$ negativ semi-definit

Ist P_0 echt maximal. Dann gilt $\text{Hess}\, u(P_0)$ neg. definit, d.h.

$\text{diag}(\text{Hess}(P_0)) < 0$

$\Rightarrow \quad \text{spur}(\text{Hess}(P_0)) < 0$

(4) Ferner: $\Delta u(x) = \text{spur}(\text{Hess}\, u(x))$,

also $\Delta u(P_0) < 0$ ↯

Minimum analog.

Konsequenz: Nimmt eine harmonische Funktion Min oder Max in D an, so ist sie konstant.

<u>Folgerung</u>: Das Poisson Problem

$$-\Delta u = f \text{ in } D$$
$$u = g \text{ auf } \partial D$$

ist, falls lösbar, eindeutig lösbar

Nachweis: Seien $u_1 \neq u_2$ Lösungen $\Rightarrow$ $u = u_1 - u_2$ erfüllt $-\Delta u = 0$ in D, $u = 0$ auf ∂D.

12.06.09

d.h. $\operatorname{Max} u = \operatorname{Min} u = 0 \Rightarrow u = 0$,

d.h. $u_1 = u_2$.

Weiteres Studium: Entsprechende Aussagen gelten auch für allgemeinere elliptische Differentialoperatoren etwa der Form

$$Lu(x) := -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b^t(x)\nabla u(x) + c(x)\,u(x)$$

mit $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(x) \in \mathbb{R}^n$, $c(x) \in \mathbb{R}$

(5) Schwache (variationelle) Form des Poisson Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma_1 \qquad \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega \\ \underbrace{\partial_\nu u + \alpha u = h}_{\text{Robin Randbedingung}} && & \text{auf } \Gamma_2 \qquad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \end{aligned}$$

Herleitung: Mult DGL mit v und Integriere:

$$\underbrace{\int_\Omega -\Delta u\, v\, dx}_{\text{umformen mittels partieller Integration}} = \int_\Omega f v\, dx$$

12.06.09

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} v\, \partial_\nu u\, d\sigma$$

$$\int_{\partial\Omega} v\, \partial_\nu u\, d\sigma = \int_{\Gamma_1} v\, \partial_\nu u\, d\sigma + \int_{\Gamma_2} v\, \partial_\nu u\, d\sigma$$

Wähle $v=0$ auf Γ_1. Dann

$$\int_{\partial\Omega} v\, \partial_\nu u\, do = \int_{\Gamma_2} v\, \partial_\nu u\, do = \int_{\Gamma_2} v\,(h-\alpha u)\, do$$

⑥ Insgesamt:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v\, do = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_2} h v\, do$$

für alle Funktionen v mit $v=0$ auf Γ_1