Partielle Differentialgleichungen

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

UH
Universität Hamburg

12. Juni 2009

Potentialgleichung

Finde $\boldsymbol{u}$ mit

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für } x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$$

heißt Poisson Problem. Dabei ist $\boldsymbol{D}$ offenes Gebiet. Es fehlen noch Randwerte;
Zugeordnete Randwertaufgaben:

1. Dirichlet Problem

$$u(x) = g(x) \text{ für } x \in \partial D.$$

2. Neumann Problem

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = g(x) \text{ für } x \in \partial D.$$

3. Robin Problem

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) + \alpha u(x) = g(x) \text{ für } x \in \partial D.$$

Dabei sind $\boldsymbol{g}$ und $\alpha > 0$ gegeben.

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Sei $r = r(x) = |x - x_0|$. Sei u harmonisch in dem beschränkten, offenen Gebiet D und besitze stetige Ableitungen bis zur Ordnung 1 in $\bar{D}$. Dann gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\frac{1}{r}) \right] dO.$$

Mittelwerteigenschaft: Sei u harmonisch in D und $K_\rho(x_0) \subset D$. Dann gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial K_\rho(x_0)} u \, dO.$$

Maximumprinzip: Sei u harmonisch in D und stetig auf $\bar{D}$. Dann nimmt u ihr Maximum und Minimum auf ∂D an. Gibt es $x_0 \in D$ mit $u(x_0)$ maximal (minimal), so ist $u \equiv const$ auf D.

Eindeutigkeitsaussagen für das Poisson Problem

Dirichlet, Neumann und Robin Problem für die Potentialgleichung besitzen höchstens eine Lösung.

Nachweis (nur für das Dirichlet Problem): Sind $u_1 \neq u_2$ zwei Lösungen zu denselben Daten, so ist $u := u_1 - u_2$ harmonisch mit $u = 0$ auf ∂D. Da Maximum und Minimum von u auf ∂D angenommen werden, muß $u \equiv 0$ in D gelten, also $u_1 = u_2$.

Maximum Prinzipien gelten auch für wesentlich allgemeinere Differentialgleichungen 2ter Ordnung $\longrightarrow$ Selbststudium.

Variationelle Formulierung

Sei mit der $n \times n$ Matrix $A(x)$, dem $n-$Vektor $b(x)$ und der Funktion $c(x)$

$$Lu(x) := -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + b(x)^t \nabla u(x) + c(x)u(x).$$

Es gelte $\partial D = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Die variationelle Formulierung der elliptischen Randwertaufgabe

$$Lu = f \text{ in } D, \quad u = g \text{ auf } \Gamma_1, \langle A\nabla u, \eta\rangle + \beta u = h \text{ auf } \Gamma_2$$

lautet: Finde eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u = g$ auf Γ_1 und

$$\int_D A\nabla u \nabla v + b^t \nabla u v + cuv dx + \int_{\Gamma_2} \beta uv dO = \int_D fv dx + \int_{\Gamma_2} hv dO \; \forall v \in V.$$

Dabei

$$V := \{v \in C^1(\bar{D}); v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

und η die äussere Einheitsnormale an ∂D bezeichnet.

Eine genaue Beschreibung des analytischen Rahmens für diese Formulierung finden Sie etwa in Hackbusch: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.